Théorie de la Mesure et de l'Intégration

Ahmed BOUZIAD

Professeur, Université de Rouen

Cours destiné aux étudiants de L3 mathématiques

Département de Mathématiques

Chapitre 1

Quelques notions de la théorie des ensembles

1.1 Rappels et notations

L'ensemble des entiers naturels positifs ou nuls est noté $\mathbb{N}$. La lettre $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. La relation d'ordre (usuelle) sur l'ensemble $\mathbb{R}$, notée $\leq$, est définie par $a \leq b$ (ou $b \geq a$) si $b-a$ est positif. On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels positifs non nuls et on écrit $a < b$ (ou $b > a$) si $b - a \in \mathbb{R}_+^*$. Les relations données par la restriction de $\leq$ aux ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont désignées par le même symbole $\leq$.

Proposition 1.1.1. (Principe de la récurrence) *Toute partie non vide de l'ensemble $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément pour la relation $\leq$.*

Proposition 1.1.2. *Tout partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée (respectivement, minorée) dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement, une borne inférieure), dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.1.3. *Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}$. Alors, $a \leq b$ si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $a \leq b + \varepsilon$.*

Preuve. Si $a \leq b$ et $\varepsilon > 0$, alors $b + \varepsilon \geq a + \varepsilon$ et $a + \varepsilon \geq a$, donc par transitivité $b+\varepsilon \geq a$. Inversement, supposons que $a \not\leq b$, et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a \not\leq b+\varepsilon$. Comme l'ordre $\leq$ est total, on a $b \leq a$ et $a \neq b$, autrement dit $a-b > 0$. Posons $\varepsilon = (b - a)/2$. On a $a - (b + \varepsilon) = a - (b + (a - b)/2) = (a - b)/2 > 0$, donc $a > b + \varepsilon$. $\square$

Proposition 1.1.4. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors a est la borne supérieure de A si, et seulement si, a est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $a = \lim a_n$.*

Preuve. Soit b la borne supérieure de A. Par définition de b, on a $b \leq a$. D'autre part, on a $a_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim a_n \leq b$, autrement dit, $a \leq b$.

Inversement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $b - 1/n$ n'est pas un majorant de A car $b - 1/n < b$; autrement dit il existe au moins un élément a_n de A tel que $b - 1/n < a_n$. On a alors $b - 1/n \leq a_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lim a_n = b$. $\square$

On a bien sûr l'énoncé suivant : *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ minorée dans $\mathbb{R}$, alors $a \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A si, et seulement si, a est un minorant de A et a est limite d'un suite d'éléments de A.*

1.2 Ensembles, applications et familles

Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensembles des parties de X. Une application de X dans un ensemble Y est une partie G du produit $X \times Y$ telle que pour tout $x \in X$ il existe un et un seul élément y de Y vérifiant $(x, y) \in G$. Cet unique élément y de Y est dit image de x par l'application G. L'application G est habituellement notée $f : X \to Y$ et y (l'image de x par G) et noté $f(x)$. L'application $f : X \to Y$ est également appelée *famille d'éléments de Y indexée par X*.

Soit I un ensemble. On appelle famille de parties de X toute application $f : I \to \mathcal{P}(X)$. En désignant l'image $f(i)$ de chaque élément i de I par A_i, l'application $f : I \to \mathcal{P}(X)$ est simplement notée $(A_i)_{i \in I}$.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. L'union de $(A_i)_{i \in I}$ est définie (et notée) par

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}.$$

De même, l'intersection de la fammille $(A_i)_{i \in I}$ est définie (et notée) par

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \text{pour tout } i \in I \text{ on a } x \in A_i\}.$$

Le complémentaire dans X d'une partie A de X est l'ensemble des éléments de X n'appartenant pas à A. Il y a plusieurs symboles utilisés pour désigner le complémentaire de A dans X : $X \setminus A$, $\complement_X A$ (ou simplement $\complement A$) ou encore A^c ou $\overline{A}$. Nous ne ferons pas usage de la notation $\overline{A}$ car elle est employée en topologie pour un concept totalement différent.

La formule de de Morgan est l'égalitée

$$[\bigcup_{i \in I} A_i]^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

valable pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X. Elle est équivalente à la formule

$$[\bigcap_{i\in I} A_i]^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

L'image d'une application $f : X \to Y$ est l'ensemble $\{f(x) : x \in X\}$ que l'on note $f(X)$. Plus généralement, si $A \subset X$, on appellle image de A par f l'ensemble $\{f(x) : x \in A\}$ que l'on note $f(A)$. Si $B \subset Y$, l'ensemble $\{x \in X : f(x) \in B\}$, noté $f^{-1}(B)$, est dit image réciproque (ou inverse) de B par l'application f. Les formules à connaitre sont :

(i) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ valable pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X,
(ii) $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$,
(iii) $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
(iv) $f^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X f^{-1}(B)$.

Les égalitées (ii), (iii) et (iv) sont valables pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y et pour tout $B \subset Y$.

1.3 Cardinalités, ensembles dénombrables

On dit que deux ensembles X et Y ont le même cardinal s'il existe une bijection $f : X \to Y$. Dans ce cas on écrit $X \cong Y$. La “relation" $\cong$ est reflexive, symétrique et transitive. On note $|X|$ la collection des ensembles ayant le même cardinal que X. Ainsi, Y fait partie de $|X|$ si Y est en bijection avec X. On écrit $|X| \leq |Y|$ s'il existe une injection de X dans Y (cette notation depend uniquement de $|X|$ et $|Y|$).

Théorème 1.3.1. (Cantor-Bernstein) *Soit X et Y deux ensembles tels que $|X| \leq |Y|$ et $|Y| \leq |X|$. Alors $X \cong Y$.*

Par ailleurs, on a aussi le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. (Cantor) *Pour tout ensemble X, on a $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. De plus, cette inégalité est stricte : il n'existe pas d'injection de $\mathcal{P}(X)$ dans X.*

Preuve. L'application $x \in X \to \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ est une injection, donc $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Soit $f : \mathcal{C} \to X$ une application injective, où $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, et montrons que $\mathcal{C} \neq \mathcal{P}(X)$. Soit $A = \{x \in f(\mathcal{C}) : x \notin f^{-1}(x)\}$. Supposons que $A \in \mathcal{C}$ et posons $x_0 = f(A)$. Or si $x_0 \in A$ alors $x_0 \notin f^{-1}(x_0) = A$, et si $x_0 \notin A$ alors $x_0 \in A$, donc $A \notin \mathcal{C}$. $\square$

Un ensemble X est dit *dénombrable* s'il existe une application injective $f : X \to \mathbb{N}$, autrement dit, si $|X| \leq |\mathbb{N}|$. On dit dans ce cas que le cardinal de X est dénombrable. On dit que X est *infini* s'il existe une injection $f : \mathbb{N} \to X$, autrement dit, si $|\mathbb{N}| \leq |X|$. L'ensemble X est dit *fini* s'il n'est pas infini. On notera que les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Proposition 1.3.3. *Tout ensemble fini X est dénombrable. De plus, dans ce cas et si X est non vide, il existe un et un seul entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On dit que X a pour cardinal n ou encore X admet n éléments.*

Preuve. On peut suppposer que X est non vide. Supposons qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X soit en bijection avec l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Soit $x_1 \in X$. Comme l'application $x_1 \in \{x_1\} \to 1 \in \{1\}$ est bijective, on a $X \neq \{x_1\}$. Soit $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$. De même, l'application $x_i \in \{x_1, x_2\} \to i \in \{1, 2\}$ étant bijective, on a $X \neq \{x_1, x_2\}$. En continuant ce processus, on définit par "récurrence" une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de X telle que l'application $n \in \mathbb{N} \to x_{n+1} \in X$ soit injective, prouvant ainsi que X est infini.

L'unicité de l'entier n est claire. □

Proposition 1.3.4. *Les ensembles $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

Preuve. L'application $(n, m) \in \mathbb{N} \times N \to 2^n 3^m \in \mathbb{N}$ est une injection. Donc $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. De même l'application $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $\phi(n) = -2n$ si $n < 0$ et $\phi(n) = 2n+1$ si $n \geq 0$ est injective. Enfin, l'application $x \in \mathbb{Q} \to (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, où p/q est la fraction irréductible représentant x, est une injection. □

Notons l'usage dans la preuve ci-dessus de la remarque suivante : *si l'ensemble X est dénombrable et s'il existe une injection $f : Y \to X$, alors l'ensemble Y est dénombrable.* Cette propriété est une conséquence immédiate du fait que toute application composée de deux applications injectives est une application injective.

Proposition 1.3.5. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles d'un enemble X. Supposons que l'ensemble I ainsi que tous les ensembles X_i, $i \in I$, sont dénombrables. Alors l'ensemble $\bigcup_{i \in I} X_i$ est dénombrable.*

Preuve. Il suffit de trouver une injection définie sur $\bigcup_{i \in I} X_i$ et à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Proposition 1.3.4). Fixons une injection $\phi : I \to \mathbb{N}$ et pour tout $i \in I$, soit $\phi_i : X_i \to \mathbb{N}$ une injection. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$. L'ensemble $A_x = \{\phi(i) : x \in X_i\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. Soit n_x le plus petit élément de A_x (principe de la récurrence) et désignons par i_x l'unique élément de $\phi^{-1}(\{n_x\})$. Notons que $x \in X_{i_x}$. En effet, on a $n_x \in A_x$, donc il existe $i \in I$ tel que $n_x = \phi(i)$ et $x \in X_i$; comme ϕ est injective, on a $i = i_x$, donc $x \in X_{i_x}$. Par conséquent, l'application $\psi : \bigcup_{i \in I} X_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\psi(x) = (n_x, \phi_{i_x}(x))$ est bien définie. Montrons que ψ est injective. Soit $x, y \in \bigcup_{i \in I} X_i$ tels que $\psi(x) = \psi(y)$. On a alors $n_x = n_y$ et $\phi_{i_x}(x) = \phi_{n_y}(y)$. Il en résulte que $i_x = i_y$. Comme ϕ_{i_x} est injective, on a $x = y$. $\square$