



Cours de mathématiques : Probabilités et statistiques

Deuxième année

IUT de Rouen

Département Génie chimique et Génie des procédés

Mostafa Ouzina

Année 2016-2017

Table des matières

1	Probabilités	5
1.1	Analyse combinatoire	5
1.1.1	Suite de p éléments dans un ensemble E à n éléments avec ordre	5
1.1.2	Ensemble de p éléments dans un ensemble E à n éléments, sans ordre	6
1.1.3	Quelques propriétés importantes	6
1.2	Calcul de probabilités	8
1.2.1	Une définition pratique : le modèle d'urne	9
1.2.2	Vocabulaire	9
1.2.3	Situation d'équiprobabilité	10
1.2.4	Les premiers théorèmes	10
1.2.5	Situations de référence	11
1.2.6	Probabilités conditionnelles, événements indépendants	11
1.2.7	Partition d'un ensemble – Formule des probabilités totales	11
1.3	Variables aléatoires	12
1.3.1	Définitions	12
1.3.2	Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable discrète	13
1.3.3	Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable continue	13
1.3.4	Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire	14
1.4	Quelques lois usuelles	15
1.4.1	Loi binômiale (épreuves indépendantes répétées)	15
1.4.2	Loi de Poisson	18
1.4.3	Loi normale (dite de Laplace-Gauss)	18
1.4.4	Quelques aires remarquables	23
1.4.5	Approximation d'un loi binômiale par une loi normale	23
1.5	Variables aléatoires indépendantes et théorème limites	23
1.5.1	Indépendance de deux variables aléatoires	23
1.5.2	Espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires	25
1.5.3	Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes	25
1.5.4	cas de variables aléatoires suivant des lois usuelles	25
1.5.5	Théorème limites	25
1.6	Exercices	26
1.6.1	Analyse combinatoire	26
1.6.2	Calcul de probabilité	27
1.6.3	Variables aléatoires	29

Chapitre 1

Probabilités

1.1 Analyse combinatoire

Introduction

Soit un ensemble de trois éléments : $E = \{a; b; c\}$ On peut effectuer sur cet ensemble, sous l'angle du dénombrement, un certain nombre d'opérations, parmi lesquelles les suivantes :

- On peut choisir un seul élément, et il y a alors trois possibilités : a, b ou c
- On peut prendre deux dans un ordre déterminé. On a alors les couples : (a,b) ; (a,c) ; (b,a) ; (b,c) ; (c,a) ; (c,b) ; c'est-à-dire 6 possibilités.
- On peut encore prendre deux mais dans un ordre indifférent ; alors par exemple (a,b) et (b,a) ne compte plus que pour un ; il n'y a plus que 3 possibilités.
- On peut prendre tous les trois dans un ordre déterminé . On obtient les triplets : (a,b,c) ; (a,c,b) ; (b,a,c) ; (b,c,a) ; (c,a,b) ; (c,b,a). soit 6 possibilités.
- Il n'existe évidemment qu'une possibilité de les prendre tous les trois dans un ordre indifférent. Ces diverses façons de grouper les éléments d'un ensemble « dénombrable » forme ce qu'on appelle l'analyse combinatoire.

1.1.1 Suite de p éléments dans un ensemble E à n éléments avec ordre

1. Avec ordre avec répétition

Proposition 1.1.1.

le nombre de suites de p-éléments distincts ou non de E à n éléments est égal à

$$n^p$$

Exemple 1.1.1. Le nombre de numéros distincts à 10 chiffres est 10^p

2. Avec ordre sans répétition

Proposition 1.1.2.

On réalise un arrangement de p éléments parmi n () si on les choisit dans un ordre déterminé (2^e exemple). C'est-à-dire une suite de p éléments distincts dans de E. Le nombre d'arrangements possibles se note et se lit a.p.n

et on a :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} \quad \text{avec la convention} \quad A_n^0 = 1.$$

Exemple 1.1.2. Un arrangements de 2 éléments parmi 3 est $A_3^2 = 6$

• S'il faut répartir trois postes de travail entre 6 ouvriers, les trois postes étant de nature différentes, il faudra choisir trois ouvriers parmi les 6, pour une place déterminée. Il y a donc $A_6^3 = \text{fact}6 \text{ over } \text{fact}(6-3) = \text{fact}6 \text{ over } \text{fact}3 = 120$ possibilités.

Proposition 1.1.3.

On réalise une permutation si on prend tous les éléments de l'ensemble dans un ordre déterminé (4^e exemple ci dessus)., c'est à dire un arrangement d'ordre n. Si P_n est le nombre de permutation d'un ensemble de n éléments, alors

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2.1 = n!$$

Exemple 1.1.3. : – Le nombre de permutations de 3 éléments est $P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$

billet S'il faut répartir 6 postes de travail entre 6 ouvriers, le nombre de solutions possibles est $P_6 = 720$.

1.1.2 Ensemble de p éléments dans un ensemble E à n éléments , sans ordre

Proposition 1.1.4.

On réalise une combinaison de p éléments parmi n si on les choisit dans un ordre indifférent (3^e exemple). Le nombre de combinaisons possibles s'écrit se lit c.p.n En partant des arrangements, on observera que toutes les permutations de p éléments ne forment qu'une combinaison. D'où

$$C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{avec la convention} \quad C_n^0 = 1.$$

Exemple 1.1.4. – $C_3^2 = 3! \text{ over } 2!1! = 3$ (3exemple)

– S'il faut répartir trois postes de travail identiques entre 6 ouvriers, c'est une combinaison de 3 parmi 6 qu'il faut réaliser. Le nombre de solution est $S = C_6^3 = 6! \text{ over } 3! \times 3! = 20$

1.1.3 Quelques propriétés importantes

Propriété 1.1.1.

- pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^1 = 1$.
- pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $0 \leq p \leq n$, $C_n^{n-p} = C_n^p$
- pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $1 \leq p \leq n-1$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Graphiquement, le calcul des C_n^p successifs donne ce que l'on appelle *le triangle de Pascal* :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
⋮	1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	1

Ainsi $C_5^2 = 10$ par exemple.

On retrouve les C_n^p dans d'autres branches des mathématiques ; on a ainsi, en algèbre, la formule dite du *binôme de Newton*, qui sert à développer une expression du type $(a + b)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Cette formule dit que si a et b sont deux réels quelconques et n un entier quelconque, alors

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$$

autrement dit :

$$(a + b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n$$

Appliqué à $n = 4$, la formule du binôme donne :

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Applications :

- Dénombrer à l'aide d'un tableau** Dix-huit équipes de football participent à un championnat. Chaque équipe rencontre toutes les autres en deux matchs, un aller et un retour. Combien y a-t-il de matchs dans ce championnat ?
- Dénombrer à l'aide d'un arbre** Au cours d'un processus de production, une pièce doit passer sur quatre machines A, B, C et D
 - Combien y a-t-il de trajets possible si l'ordre de passage sur les machines est différent ?
 - Combien y a-t-il de trajet si la pièce doit passer en A avant B et D, et en C avant D ?
- Le nombre de parties d'un ensemble.** Quel est le nombre N de parties d'un ensemble à n éléments ? Autrement dit calculer $N = \sum_{k=0}^n C_n^k$
- Linéarisation** Pour pouvoir intégrer certaines fonctions trigonométriques, il faut les linéariser :
 - $\sin(x)^4$
 - $\sin(x)^3 \cos(x)$

Indication : Utiliser la formule d'Euler $\sin(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)$ puis à l'aide de la formule du binôme développer $\sin(x)^4 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4$. vous obtenez alors :

$$\sin(x)^4 = \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}$$

1.2 Calcul de probabilités

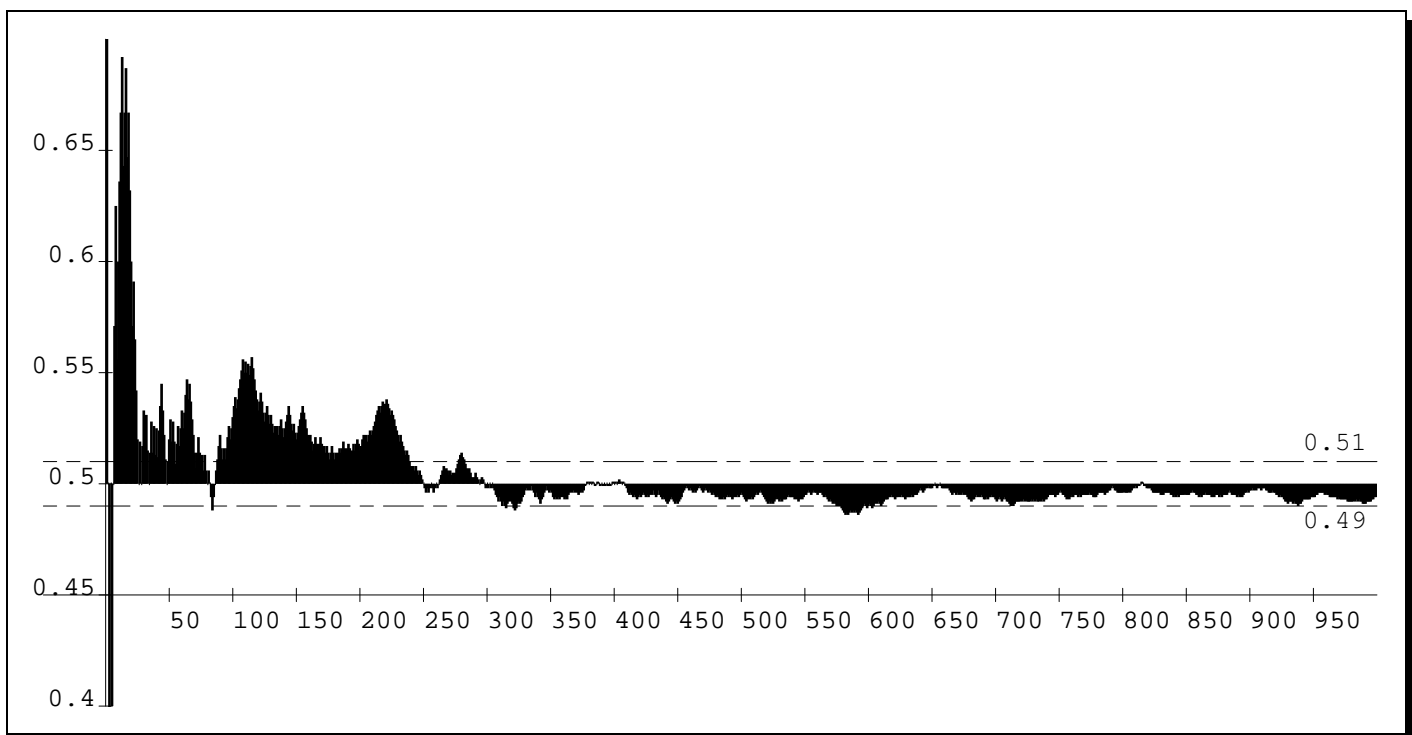
introduction

Il a fallu longtemps pour arriver à une définition satisfaisante de la probabilité. Celle en vigueur actuellement a été publiée en 1933 et est due au russe Kolmogorov. Cette définition explicite le lien entre la fréquence d'un événement et sa probabilité. Elle s'exprime de façon tout à fait rigoureuse (bien sûr), et en français vulgarisé elle dit à peu près ceci :

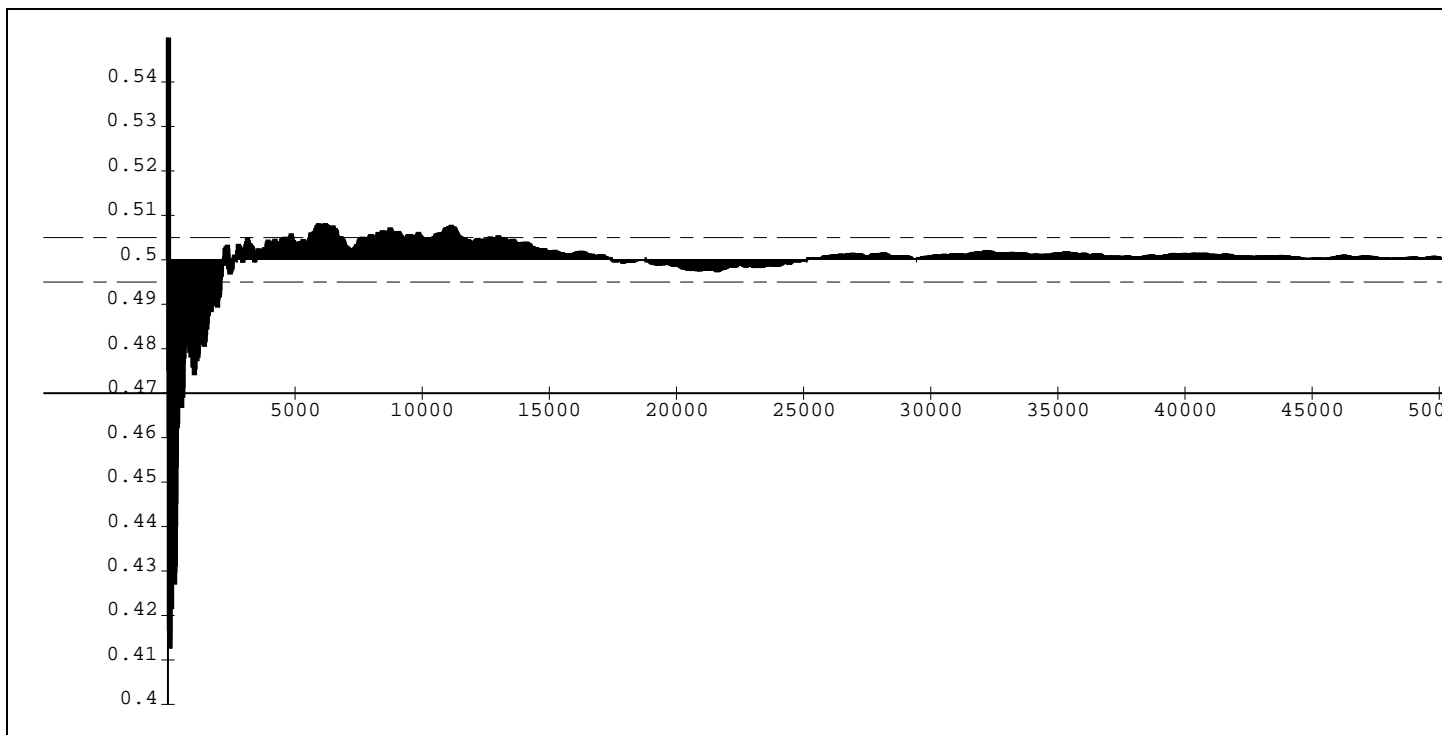
*Plus le nombre d'expérience augmente, et plus il est **probable** que la fréquence de l'événement A sera proche de la probabilité de A.* Par exemple, au jeu de *Pile ou Face*, la probabilité de l'événement « *obtenir un Pile* » est $1/2$. Cela signifie que plus le nombre de parties augmente, et plus il est probable que la fréquence d'apparition du *Pile* soit proche de $1/2$.

Dans la pratique, on obtient des schémas où l'on observe une certaine « stabilisation de la fréquence » avec l'augmentation du nombre d'expériences.

Par exemple, en voici un issu d'une simulation de 1000 parties : successives.



Sur 100 000 parties, on obtient un graphique de ce type (noter le facteur d'agrandissement par rapport au graphique précédent) :



Cette définition est évidemment inexploitable telle quelle à notre niveau, bien qu'il soit possible (et donc *probable*), que nous la retrouvions plus tard dans l'année scolaire. Sous sa forme rigoureuse, elle est appelée *loi faible des grands nombres*.

1.2.1 Une définition pratique : le modèle d'urne

Dans la plupart des calculs pratiques, le plus simple consiste à ramener l'exemple étudié à la situation de référence : l'unique tirage dans une urne. On utilise ensuite la définition suivante du mot *probabilité* :

Définition 1.2.1. Probabilité d'un événement. On considère une urne opaque contenant k boules blanches et q boules noires ($k, q \in \mathbb{N}$), dans laquelle on procède à un tirage aléatoire d'une seule boule. On fait l'hypothèse que chacune des boules a la même probabilité d'être choisie.

Alors la *probabilité* de l'événement « choisir une boule blanche » est

$$p = \frac{k}{k + q}$$

Dans la pratique, cela revient à effectuer une *modélisation* de la situation par un tirage dans une urne, ramenant le problème à un simple calcul de dénombrement.

Néanmoins, si l'on préfère, on peut utiliser l'ensemble des formules qui suivent.

1.2.2 Vocabulaire

On considère une expérience *aléatoire* (c'est à dire dont le résultat dépend du hasard). L'ensemble de toutes les issues de cette expérience est appelé *univers des possibles* ; on le note souvent Ω .

On appelle *événement* toute partie de l'univers des possibles, un événement réduit à une seule issue étant appelé *événement élémentaire*. Le tableau qui suit résume les définitions et notations usuelles relatives à la notion d'événement :

langage ensembliste	langage des probabilités	notation
A est une partie de Ω	A est un événement	$A \subset \Omega$
A est vide	l'événement A est impossible	$A = \emptyset$
A est égal à Ω	l'événement A est certain	$A = \Omega$
C est la réunion de A et B	C est l'événement (A ou B)	$C = A \cup B$
C est l'intersection de A et B	C est l'événement (A et B)	$C = A \cap B$
A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A et B sont complémentaires	A et B sont des événements contraires	$A = \overline{B} = {}^c B$

Propriété 1.2.1.

$A \cup B$	$A \cap B$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cup B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cap B = \overline{A \cup B}$	$A \cap B = \overline{A \cup B}$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Exemple 1.2.1. Sur 20 étudiants, 10 ont un téléphone portable et 7 ont un ordinateur. Trois étudiants ont les deux.

- Combien d'étudiants ont seulement un ordinateur? Combien d'étudiant ont l'un de ces objets?
- Combien d'étudiants ont au moins l'un de ces objets?

1.2.3 Situation d'équiprobabilité

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit que l'on est dans une *situation d'équiprobabilité*. Dans ce cas, si $\text{card}\Omega = n$, la probabilité de chacun des événements élémentaire de Ω est $1/n$. En découle le fait que si l'événement A est composé de p événements élémentaires, alors la probabilité de A est $p(A) = p/n$, formule que l'on se rappelle souvent sous la forme

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

En fait, la majeure partie des problèmes de Bts se situent sous l'hypothèse d'équiprobabilité (ou alors on s'y ramène, au moins en pensée, par exemple en numérotant les boules lors d'un tirage dans une urne), et l'une des premières choses à faire lors d'un exercice (après avoir lu son texte et traduit les hypothèses), consiste à dénombrer le cardinal de l'univers des possibles.

1.2.4 Les premiers théorèmes

Ils sont au nombre de trois et sont valables y compris dans les cas de non-équiprobabilité.

Théorème 1.2.1. 1. Si A et B sont des événements **incompatibles**, (i.e. si $A \cap B = \emptyset$) alors

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

2. Quel que soit l'événement A , la probabilité de l'événement contraire \overline{A} est donnée par

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

3. Quels que soient les événements A et B , on a

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

à partir d'un ensemble de cardinal n .

1.2.5 Situations de référence

Ce sont les tirages dans une urne, la plupart des exercices pouvant se ramener à l'une des trois situations ci-dessous.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que l'urne que l'on considère contient n boules ayant toutes la même probabilité de sortie.

– **Tirages avec remise :**

Si l'on effectue p tirages successifs avec remise, il y a n^p issues différentes possibles.

– **Tirages sans remise :**

Si l'on effectue p tirages successifs sans remise, il y a A_n^p issues différentes possibles si l'on tient compte de l'ordre de sortie, et C_n^p issues différentes possibles si l'on ne tient pas compte de cet ordre.

– **Tirages simultanés :**

On se ramène au cas des tirages sans remise. On peut, au choix, considérer ou non que l'ordre a de l'importance, le tout étant de rester cohérent d'un bout à l'autre de l'exercice : si l'on dénombre l'univers des possibles en tenant compte de l'ordre, il faut tenir compte de l'ordre jusqu'à la fin de l'exercice ! Moyennant cette précaution élémentaire, les deux méthodes (ordre ou non) donneront les mêmes résultats en termes de probabilité.

1.2.6 Probabilités conditionnelles, événements indépendants

On considère une expérience aléatoire donnée. Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$ (autrement dit, l'événement B n'est pas impossible). On appelle *probabilité de A sachant B* , et on note $p_B(A)$ ou $p(A|B)$ le nombre

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

On a donc en particulier, si $p(B) \neq 0$, les relations

$$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B).$$

Remarque. En raisonnant sur les cardinaux des ensembles plutôt que sur les probabilités, on a

$$p_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

On dit que les deux événements A et B sont *indépendants* si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (ce qui revient à dire que $p_B(A) = p(A)$).

1.2.7 Partition d'un ensemble – Formule des probabilités totales

Soit Ω un ensemble et B_1, B_2, \dots, B_n , des sous ensembles de Ω . On dit que la famille (B_1, B_2, \dots, B_n) est une *partition* de Ω lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. • les B_i sont disjoints deux à deux, (autrement dit $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$),
2. • Ω est inclus dans la réunion des B_i (autrement dit $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$).

Par exemple, si B est un sous ensemble de Ω , alors (B, \overline{B}) est une partition de Ω .

Propriété 1.2.2.

Propriété Formule des probabilités totales. Dans une expérience aléatoire, on note Ω l'ensemble des résultats possibles (on parle aussi de l'univers associé à l'expérience).

Si la famille (B_1, B_2, \dots, B_n) forme une partition de Ω , alors on a, pour tout événement A de Ω :

$$1. \quad p(A) = \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$$

$$2. \quad P_A(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(A)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P_{A_j}(A)}$$

En particulier, si B est un sous ensemble de Ω , alors

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

On en déduit alors, puisque $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ par définition, que si B n'est ni certain ni impossible, alors

$$p(A) \times p_A(B) + p(A) \times p_A(\bar{B}) = p(A)$$

soit

$$p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$$

Exemple 1.2.2. Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules blanches. On tire deux boules successivement.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de même couleur ?
3. Reprendre les mêmes questions avec un tirage avec remise.

1.3 Variables aléatoires

1.3.1 Définitions

On considère une expérience aléatoire (c'est à dire dont le résultat dépend du hasard). On note Ω l'univers de cette expérience (Ω est donc l'ensemble de tous les résultats possibles).

On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω vers \mathbb{R} .

Remarque. En termes plus concrets (mais en faisant des abus de langage), on peut considérer qu'une variable aléatoire X est une variable dont le contenu dépend du résultat d'une expérience aléatoire donnée.

On appelle *image de Ω par X* , et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs réelles pouvant être prises par X .

Si l'image de Ω par X est un intervalle ou une réunion d'intervalles, on dit que la variable X est *continue*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *discrète*.

Exemple 1.3.1. Exemples .

- On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un individu français au hasard, et à comptabiliser le nombre X de minutes qu'il a passé devant la télévision la semaine précédente. Ici, l'univers des possibles est constitué de tous les individus français, et la variable aléatoire X est continue. L'image de Ω par X est l'intervalle $[0, 7 \times 24 \times 60]$

- On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces et à observer le nombre X sur la face supérieure du dé. Ici, l'ensemble Ω contient 6 événements élémentaires, et l'image de Ω par X est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La variable aléatoire X ainsi définie est discrète.
- Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de lancers nécessaires, au jeu de Pile ou Face, pour obtenir Face pour la première fois, en supposant qu'à chaque lancer, Pile et Face sont équiprobables. Alors X peut prendre n'importe quelle valeur entière positive. L'événement $(X = k)$ correspond à : « obtenir Pile à chacun des $(k - 1)$ premiers lancers, et Face au k -ième lancer ». Dans ce cas, la variable X peut prendre une infinité de valeurs différentes. On dit que X est *discrète et dénombrable*.

1.3.2 Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable discrète

Définition 1.3.1. soit Ω un univers fini à N éventualités, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, et X une variable aléatoire discrète définie sur Ω prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des couples $(x_i, P(X = x_i))$ constitue la loi de probabilité de la variable aléatoire X

On la présente sous forme d'un tableau appelé tableau de probabilité de la variable aléatoire

X . on pose $p_i = P(X = x_i)$

Valeurs de X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$P(x = x_i)$	p_1	p_1	...	p_i	...	p_n

Remarque. La somme $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ autrement dit $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$

Exemple 1.3.2. Une urne contient 3 boules indiscernables au toucher. On procède à deux tirages successifs d'une boule, en remettant à chaque tirage la boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire qui donne la somme des numéros inscrits sur les deux boules tirées. Donner la loi de probabilité de X

Définition 1.3.2. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X l'application F définie par :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x)$$

Propriété 1.3.1.

Soit x et y deux réels

- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
- $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$
- La fonction F est croissante
- Si $x < x_i$, $F(x) = 0$ Si $x \geq x_n$; $F(x) = 1$

Exemple 1.3.3. Donner la fonction de répartition de l'exemple précédent

1.3.3 Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable continue

Exemple 1.3.4. Le jeu consiste à trouver un nombre entre 1 et 10

- Première Situation

On considère la variable aléatoire discrète X égale à un nombre entier compris entre 1 et 10. soit x_0 le nombre choisi.

la probabilité de trouver ce nombre est $P(X = x_0) = \frac{1}{10}$

le nombre de valeurs de X est fini. L'étude d'une telle variable a été fait dans la partie précédente.

– **seconde Situation**

On considère la variable aléatoire X égale à un nombre réel compris entre 1 et 10. Soit x_0 le nombre choisi.

la probabilité de trouver ce nombre est $P(X = x_0) = 0$. L'ensemble des valeurs de X est l'intervalle $[1,10]$. On ne peut pas dans ce cas définir la loi de probabilité de X avec $P(X = x_i)$.

Définition 1.3.3. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X l'application F définie par :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x)$$

Propriété 1.3.2.

Soit x et y deux réels d'un intervalle I de \mathbb{R}

- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
- $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$
- La fonction F est croissante
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- la fonction F est continue sur \mathbb{R}

Définition 1.3.4. Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une densité de probabilité si :

- pour tout $x : f(x) \geq 0$
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de point
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Propriété 1.3.3.

Soit X une variable aléatoire continue et F la fonction de répartition de X .

- La dérivée de F sur \mathbb{R} est une densité de probabilité de X notée f
- La fonction F est la primitive de $f : F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Exemple 1.3.5. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0, 3[\\ f(x) = 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est elle une densité ?
2. Représenter la fonction de répartition associée à f

1.3.4 Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire

• Si X est une variable aléatoire **discrète** prenant n valeurs x_i , avec les probabilités $P(X = x_i) = p_i$ (où $1 \leq i \leq n$), alors l'espérance mathématique, notée $E(X)$, de la variable aléatoire X est le nombre défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

• Si X est une variable aléatoire **continue**, alors l'espérance mathématique, notée $E(X)$, de la variable aléatoire X est le nombre défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

où f est la densité de probabilité de la variable X .

• Dans tous les cas, la *variance* d'une variable aléatoire X est, si elle existe, l'espérance mathématique de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$. On la note $V(X)$. On définit alors l'*écart-type* de la variable aléatoire X , noté $\sigma(X)$, par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On a alors la propriété

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

qui implique en particulier, pour tout réel a et b ,

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

1.4 Quelques lois usuelles

1.4.1 Loi binômiale (épreuves indépendantes répétées)

On considère une expérience aléatoire n'ayant que **deux issues possibles** : A et \bar{A} (souvent appelés *succès* et *échec*), et on répète n fois de suite cette expérience, en faisant l'hypothèse que chaque expérience est **indépendante des précédentes** (cas du jeu de Pile ou Face par exemple). On dit que l'on est dans le cadre d'un *schéma de Bernouilli*.

On note p la probabilité de A et $q = 1 - p$ la probabilité de \bar{A} .

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où A est réalisé après les n expériences.

Alors la loi de probabilité de X , notée $\mathcal{B}(n, p)$, est appelée *loi binômiale de paramètres n et p* , et elle est caractérisée par

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

On montre alors que son espérance, sa variance et son écart-type vérifient

$$E(X) = np \quad V(X) = npq \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

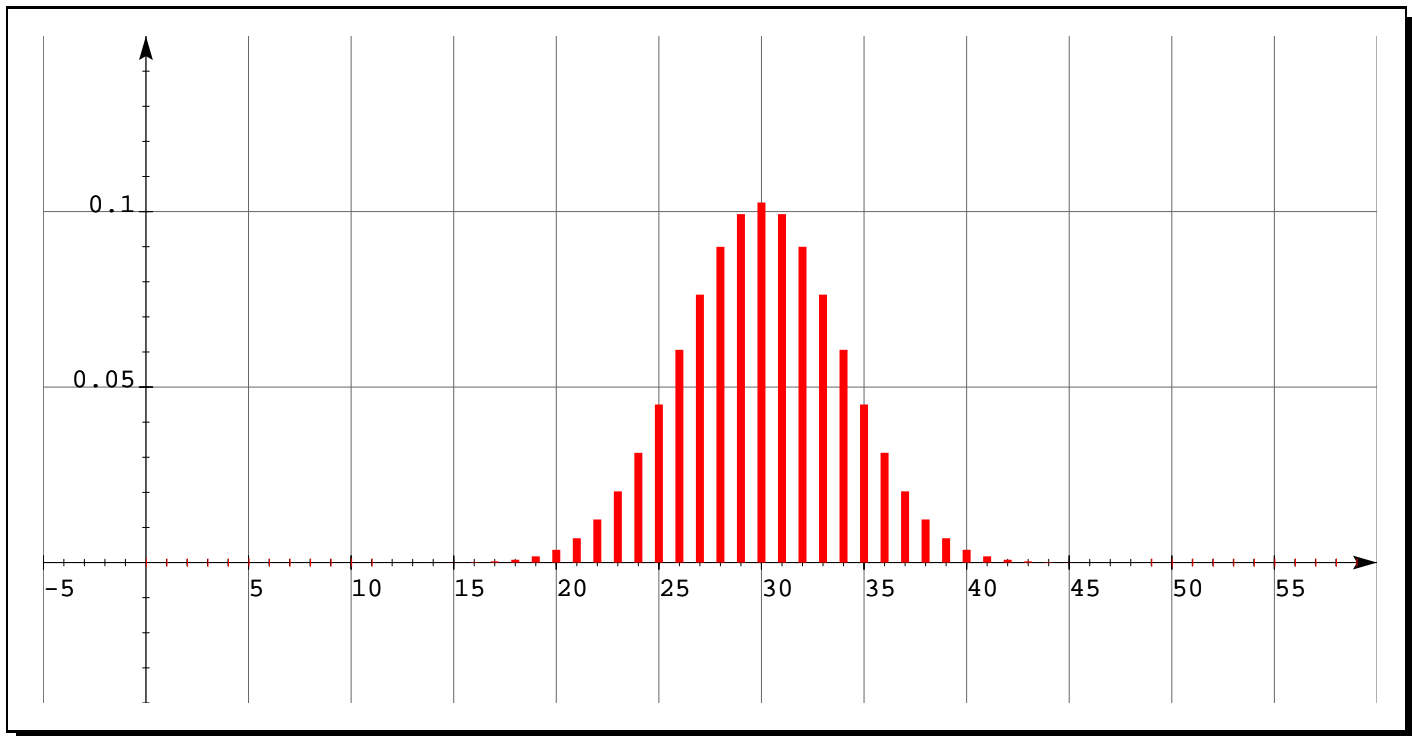
Exemple 1.4.1. Jeu de Pile ou Face.

On lance une pièce de monnaie 60 fois de suite, et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque série de 60 lancers, associe nombre de fois où est sorti le *Pile*.

Chaque lancer est indépendant des précédents, et il n'y a que 2 issues possibles (*Pile* ou non); la variable aléatoire X suit donc une loi binômiale. Comme la probabilité d'obtenir *Pile* est $1/2$, et qu'il y a 60 expériences, cette loi est la loi $\mathcal{B}(60; 1/2)$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

La probabilité d'obtenir 25 *Pile* sur les 60 lancers est

$$p(X = 25) = C_{60}^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{35} \approx 0,045.$$

TABLE 1.1 – loi binômiale $\mathcal{B}(60; 1/2)$

Exemple 1.4.2. Jeu de dé. On jette un dé bien équilibré à 6 faces. La probabilité d'obtenir le numéro 6 sur un lancer est de $1/6$. On considère l'épreuve qui consiste à lancer 60 fois de suite le dé, en notant à chaque fois le numéro obtenu.

On considère maintenant 2 variables aléatoires distinctes :

On note X la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 60 lancers associe le nombre de fois où l'on a obtenu le numéro 6, et on note Y la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 60 lancers associe le nombre de fois où l'on a **pas** obtenu le numéro 6.

Ces 2 variables sont évidemment liées : quel que soit la série de 60 lancers, on aura $X + Y = 60$.

Que ce soit du point de vue de la variable X ou de celui de la variable Y , l'expérience consistant à lancer une fois le dé est indépendante des autres expériences, et ne comporte que 2 issues possibles (on obtient le 6 ou pas, le succès du point de vue de X étant l'échec du point de vue de Y et réciproquement).

On en déduit que la variable X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(60; 1/6)$ alors que la variable Y suit la loi binômiale $\mathcal{B}(60; 5/6)$.

Les représentations graphiques de ces lois sont données ci-dessous :

La probabilité d'obtenir 10 fois le numéro 6 sur 60 lancers est :

$$\begin{aligned}
 p(X = 10) &= C_{60}^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50} = \frac{60!}{10!50!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \\
 &= \frac{60 \times 59 \times \dots \times 51}{10 \times 9 \times \dots \times 2 \times 1} \times \frac{5^{50}}{6^{60}} \approx 0,137
 \end{aligned}$$

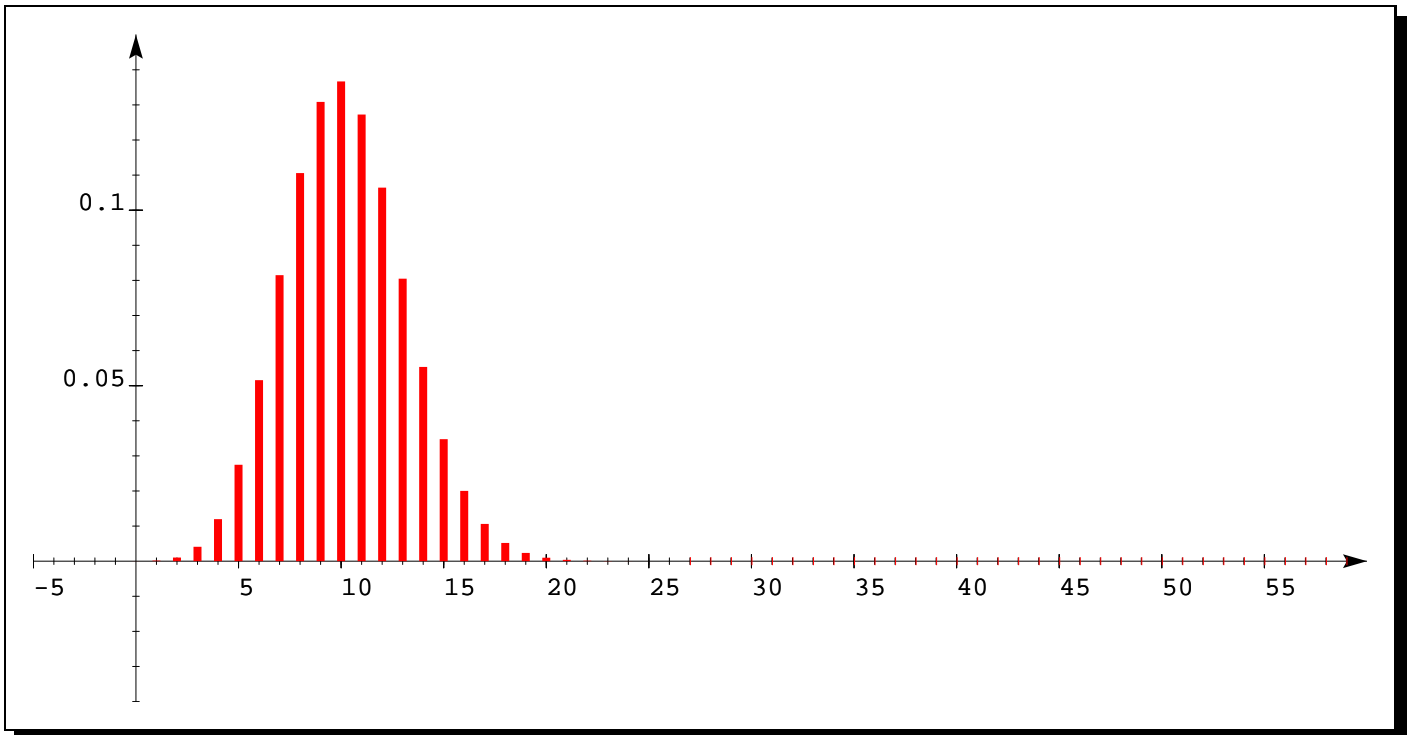


TABLE 1.2 – loi binômiale $\mathcal{B}(60; 1/6)$

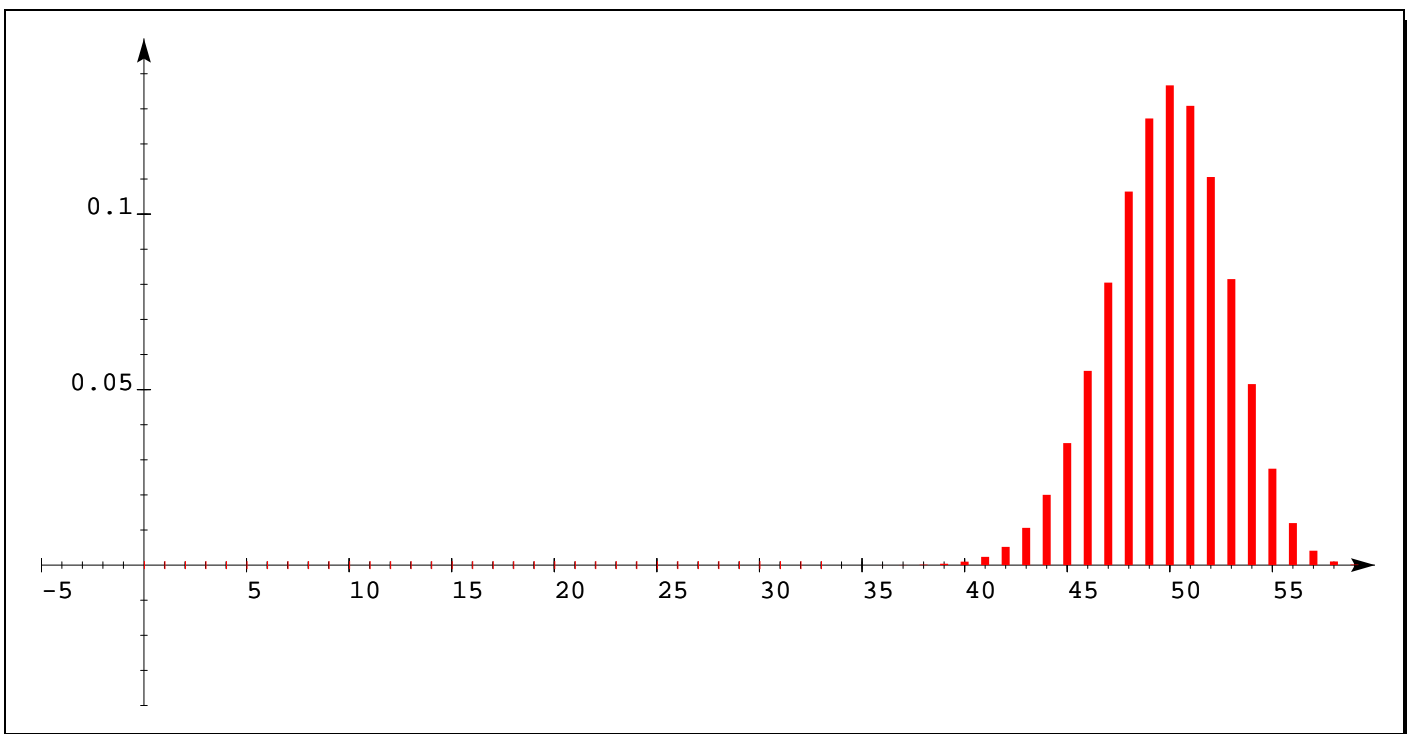


TABLE 1.3 – loi binômiale $\mathcal{B}(60; 5/6)$

La probabilité d'obtenir 50 fois un autre numéro que le numéro 6 sur les 60 lancers est :

$$\begin{aligned} p(Y = 50) &= C_{60}^{50} \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{60!}{50!10!} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \\ &= \frac{60 \times 59 \times \dots \times 51}{10 \times 9 \times \dots \times 2 \times 1} \times \frac{5^{50}}{6^{60}} \approx 0,137 \end{aligned}$$

Ces deux probabilités sont bien sûr égales puisque, comme $X + Y = 60$, on a $Y = 60 - X$ et donc

$$p(X = 10) = p(-X = -10) = p(60 - X = 60 - 10) = p(Y = 50).$$

Ici, les espérances des variables X et Y sont respectivement

$$E(X) = 60 \times \frac{1}{6} = 10 \quad \text{et} \quad E(Y) = 60 \times \frac{5}{6} = 50.$$

1.4.2 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire dénombrable X , à valeurs dans \mathbb{N} , suit une *loi de Poisson de paramètre* λ ($\lambda > 0$), si et seulement si, pour tout entier naturel k ,

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $\mathcal{P}(\lambda)$ cette loi, et on montre alors que son espérance, sa variance et son écart-type vérifient

$$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Dans la pratique, si n est « grand », p « voisin » de 0 et np pas « trop grand », on considère en général la loi de Poisson de paramètre np comme une *bonne approximation* de la loi binômiale. Plus précisément, si $n \geq 50$, $p \leq 0,01$ et $np \leq 10$, alors on considère que la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est « proche » de la loi $\mathcal{P}(np)$, ce qui permet d'utiliser la loi de Poisson (à un seul paramètre) plutôt que la loi binômiale (à deux paramètres). Les calculs s'en trouvent alors singulièrement simplifiés. . .

On retiendra que, **sous certaines conditions, on peut approcher une loi binômiale par une loi de Poisson ayant la même espérance.**

1.4.3 Loi normale (dite de Laplace-Gauss)

1. Cas général

Une variable aléatoire **continue** X suit une *loi normale de paramètres* m et λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad \text{où} \quad \sigma \geq 0 \quad \text{et} \quad m \in \mathbb{R}.$$

Elle est notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et on montre que sa variance et son écart-type vérifient :

$$E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sigma$$

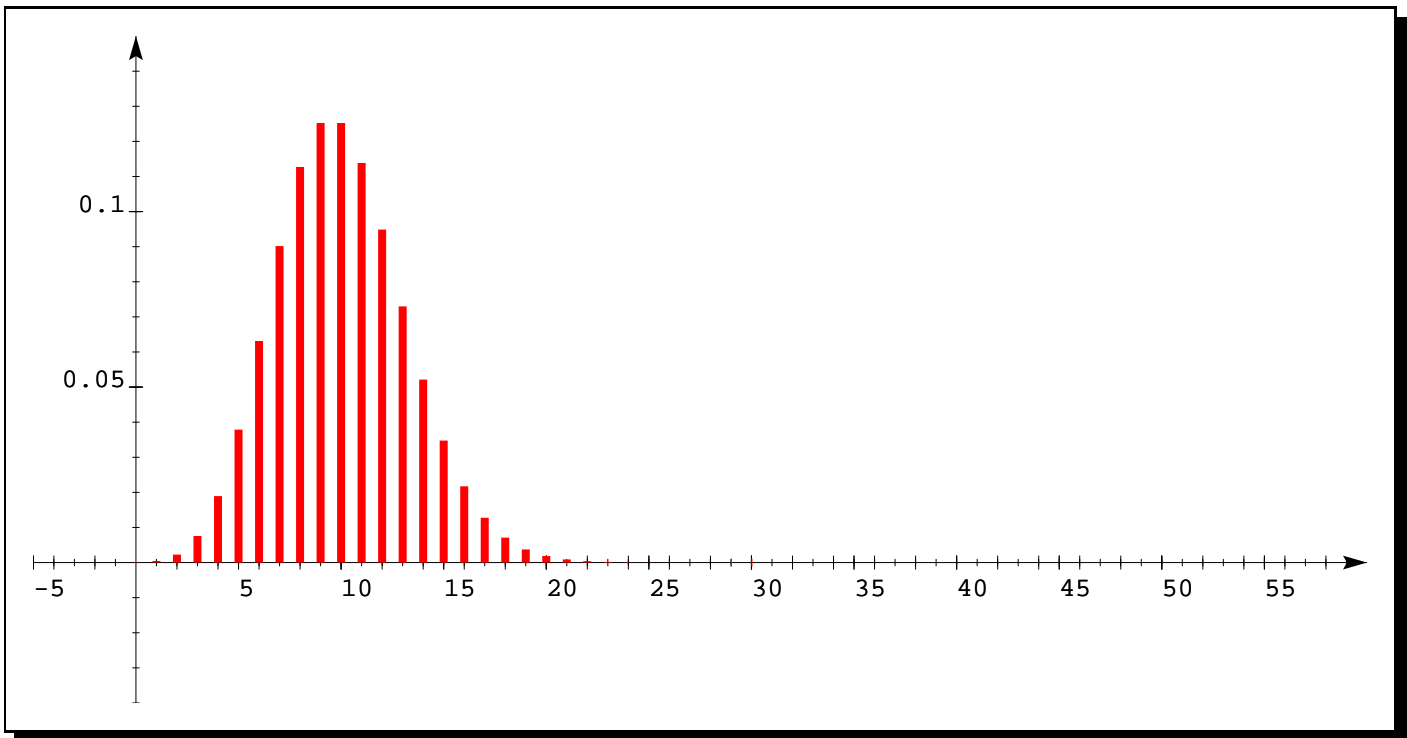


TABLE 1.4 – loi de Poisson de paramètre 10

En étudiant les variations de cette fonction, on remarque que

$$f(x + m) = f(x - m).$$

La courbe C_f présente donc une symétrie par rapport à l'axe vertical d'équation $x = m$.

On a $f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^1 \cdot \frac{1}{\sigma}$, du signe opposé à $(x - m)$. d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$	0

et la courbe

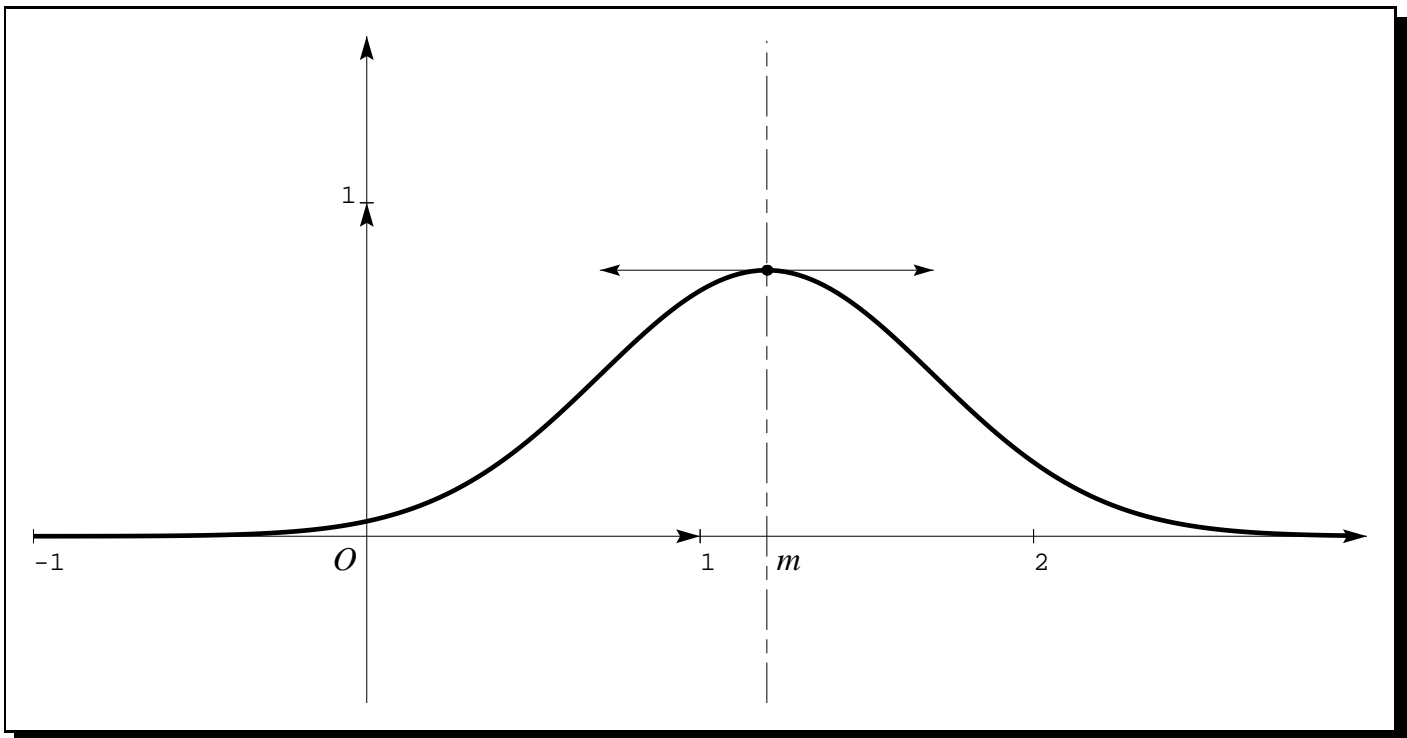
2. Loi normale centrée réduite

On appelle *loi normale centrée réduite* la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ de paramètres $m = 0$ et $\sigma = 1$. Et on a le théorème suivant, qui permet de ramener l'étude de toute loi normale à l'étude de la loi normale centrée réduite.

Théorème 1.4.1.

. Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, alors la variable aléatoire $T = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

La densité de probabilité de cette loi, et la fonction de répartition sont données par :

TABLE 1.5 – loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, avec $m = 1,2$ et $\sigma = 0,5$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \text{et} \quad P(T \leq t) = \Pi(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt$$

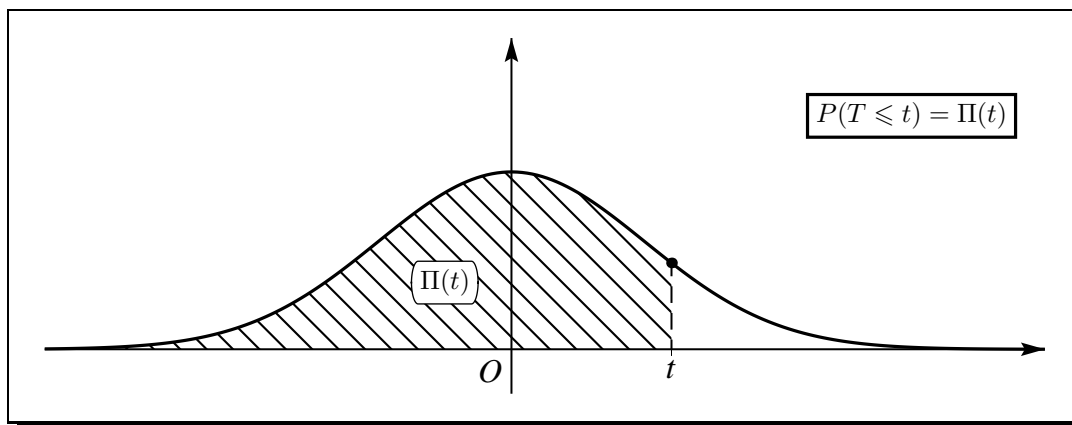
alors qu'espérance, variance et écart-type sont donnés par

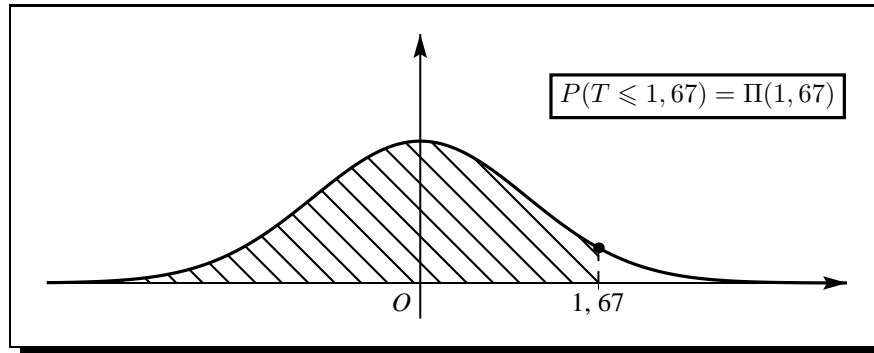
$$E(T) = 0 \quad V(T) = 1 \quad \sigma(T) = 1$$

et sa courbe représentative est la suivante :

Pour calculer la probabilité d'un événement concernant une variable aléatoire T suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on utilise en général la table du formulaire et les deux propriétés suivantes :

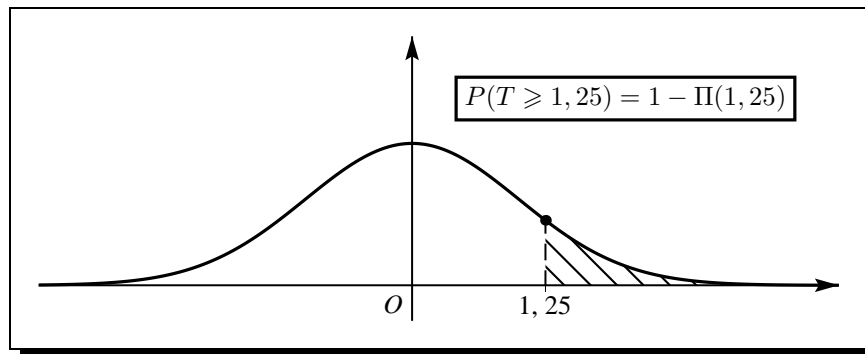
- (a) • cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- (b) • l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.

TABLE 1.6 – loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Exemple 1.4.3. Exemples.Calcul de $P(T \leq 1,67) = \Pi(1,67)$ 

la table donne directement le résultat. Il suffit de trouver les deux premiers chiffres de t dans la colonne, soit 1,6 : le troisième chiffre de t est indiqué dans la première ligne, soit 0,07. La réponse est donnée à l'intersection de la ligne correspondant à 1,6 et de la colonne correspondant à 0,07, soit $P(T \leq 1,67) = 0,9525$.

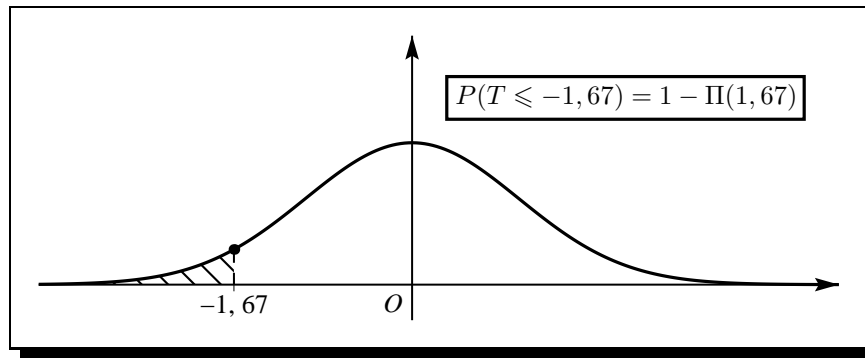
t	0,00	0,01	...	0,07	...
0,0	0,500 0	0,504 0	...	0,527 9	...
0,1	0,539 8	0,543 8	...	0,567 5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,6	0,945 2	0,946 3	...	0,952 5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Calcul de $P(T \geq 1,25)$.On a $P(T \geq 1,25) = 1 - P(T < 1,25)$, car $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Or $\Pi(1,25) = P(T \leq 1,25)$ et $P(T = 1,25) = 0$ puisque T est une variable aléatoire **continue**, d'où :

$$\begin{aligned} P(T \geq 1,25) &= 1 - \Pi(1,25) \\ &= 1 - 0,8944 \\ &= 0,1056. \end{aligned}$$

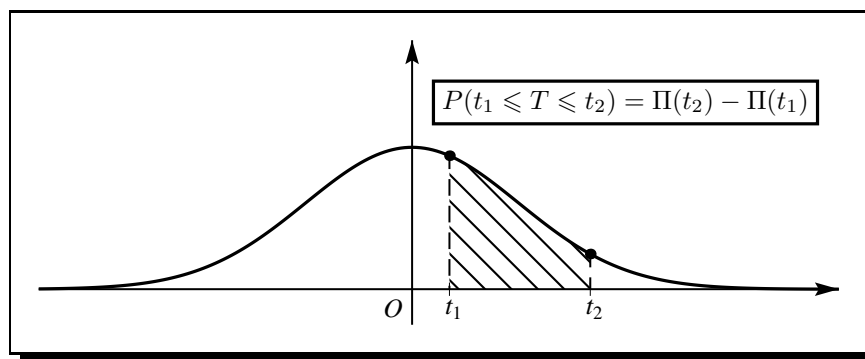
Calcul de $P(T \leq -1,67)$.



On a

$$\begin{aligned}
 P(T \leq -1,67) &= \Pi(-1,67) \\
 &= P(T \geq 1,67) \quad \text{vu la symétrie de la courbe} \\
 &= 1 - \Pi(1,67) \\
 &= 1 - 0,9525 \\
 &= 0,0475
 \end{aligned}$$

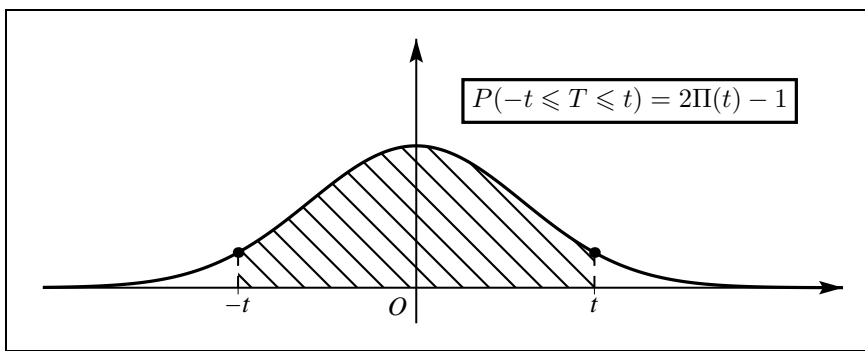
Calcul de $P(t_1 \leq T \leq t_2)$.



On a bien évidemment

$$P(t_1 \leq T \leq t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1).$$

Dans le cas particulier où $t_1 = -t_2$, on a



$$\begin{aligned}
 P(-t \leq T \leq t) &= \Pi(t) - \Pi(-t) \\
 &= 2[\Pi(t) - \Pi(0)] \quad \text{vu la symétrie de la courbe}
 \end{aligned}$$

Or $\Pi(0) = 1/2$, d'où

$$P(-t \leq T \leq t) = 2\Pi(t) - 1$$

Par exemple

$$P\left(-\frac{2}{3} \leq T \leq \frac{2}{3}\right) \approx 0,5 \quad P(-1 \leq T \leq 1) \approx 0,68 \quad P(-2 \leq T \leq 2) \approx 0,95 P(-2,6 \leq T \leq 2,6) \approx 0,99$$

3. Retour au cas général

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. On sait que la variable $T = (X - m)/\sigma$ suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Si on veut calculer la probabilité $p(a \leq X \leq b)$, on se ramène à la variable T , qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, pour pouvoir se servir du formulaire. On procède alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a - m \leq X - m \leq b - m) \\ &= P\left(\frac{a - m}{\sigma} \leq \frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{b - m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a - m}{\sigma} \leq T \leq \frac{b - m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

1.4.4 Quelques aires remarquables

Avertissement : les valeurs indiquées dans ce paragraphe ne sont données qu'à titre **indicatif** afin de donner un ordre d'idée. Pour un calcul précis (intervalle de confiance par exemple), il faut impérativement se reporter aux formulaires dédiés.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. On sait que la variable $T = (X - m)/\sigma$ suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$,

Sur le graphique ci-dessous, on indique quelques une des aires remarquables :

En effet, on a $X = m + \sigma T$. Pour tout réel $t > 0$, le calcul de $P(-t \leq T \leq t)$ donne alors

$$\begin{aligned} P(-t \leq T \leq t) &= P(-t\sigma \leq \sigma T \leq t\sigma) \\ &= P(m - t\sigma \leq m + \sigma T \leq m + t\sigma) \\ &= P(m - t\sigma \leq X \leq m + t\sigma) \end{aligned}$$

On a ainsi, par exemple, $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = 2\Pi(2) - 1 \approx 0,95$. (Ce n'est qu'une approximation assez grossière : pour plus de précision, il faudrait prendre $t = 1,96$ et non pas $t = 2$.)

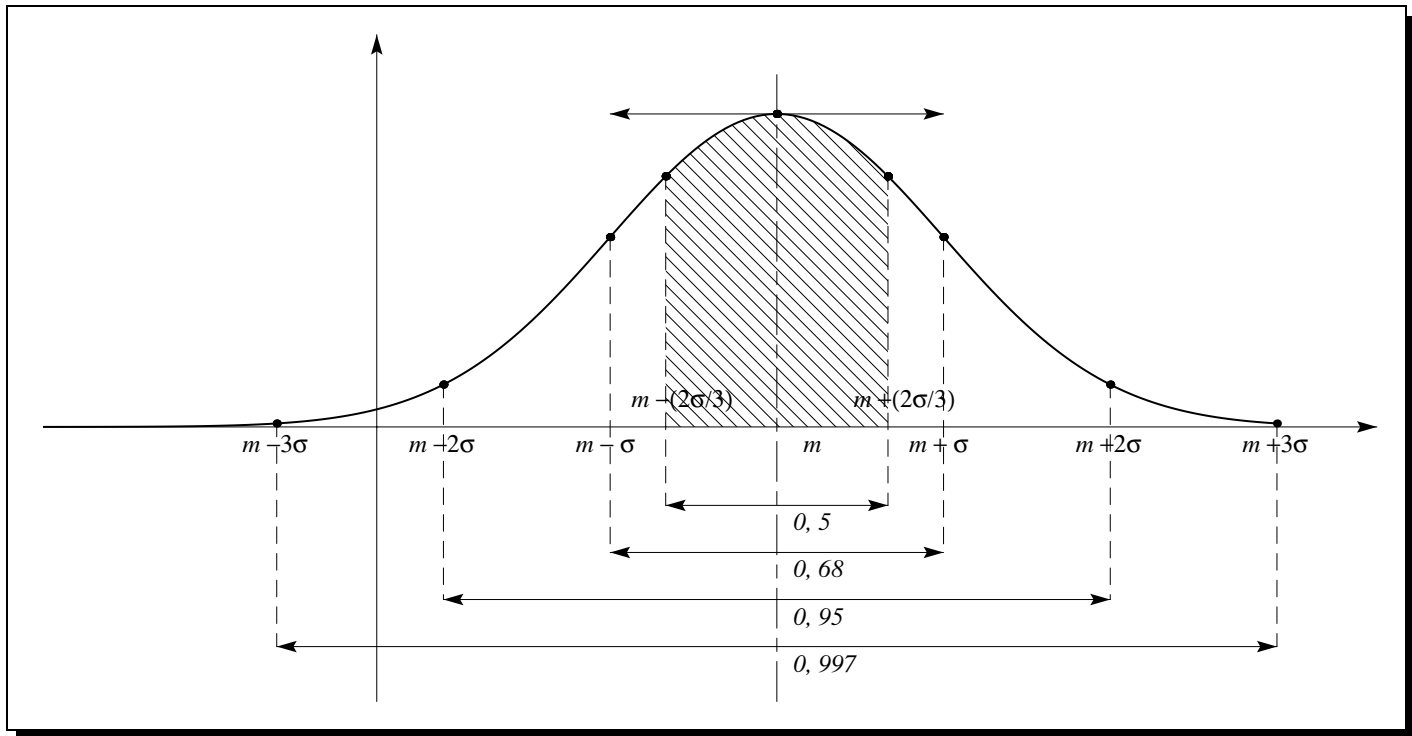
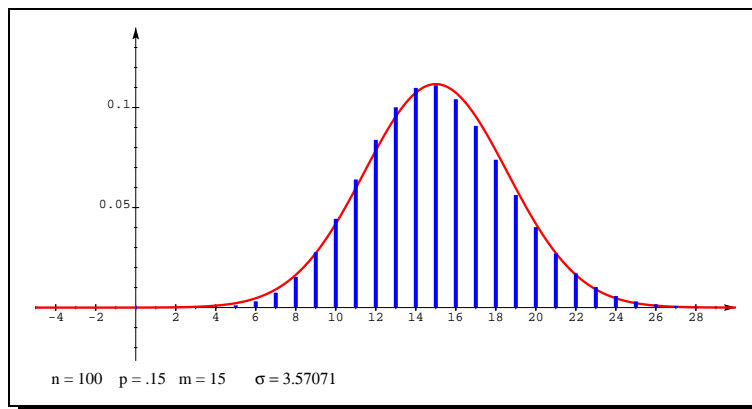
1.4.5 Approximation d'un loi binômiale par une loi normale

On admet que si n est « grand » et p ni « trop proche de 0 », ni « trop proche de 1 », alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est très proche de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ où $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. On convient en général d'utiliser cette approximation lorsque np et $n(1-p)$ sont supérieurs à 15. On remarque que, lors d'une telle approximation, la moyenne et l'écart-type sont conservés.

1.5 Variables aléatoires indépendantes et théorème limites

1.5.1 Indépendance de deux variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

TABLE 1.7 – loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et quelques aires remarquablesTABLE 1.8 – Approximation de la loi $\mathcal{B}(100; 0,15)$ par la loi $\mathcal{N}(15, \sqrt{100 \times 0,15 \times 0,85})$

Soit Y une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$. Alors les variables X et Y sont indépendantes si, pour tout i et j vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a

$$p(X = \alpha_i \text{ et } Y = \beta_j) = p(X = \alpha_i) \times p(Y = \beta_j)$$

1.5.2 Espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires d'espérances respectives $E(X)$ et $E(Y)$, alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

De la même façon, on aura $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.

1.5.3 Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

1.5.4 cas de variables aléatoires suivant des lois usuelles

Lois normales

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la variable $X_1 + X_2$ suit la loi normale de moyenne $m_1 + m_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Lois de Poisson

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

1.5.5 Théorème limites

Théorème 1.5.1 (Lois des grands nombres).

Soit X une variable aléatoire et n variables aléatoires $X_1; X_2; \dots; X_n$ de même loi de probabilité que X . Si on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$ alors S_n converge vers $E(X)$ en probabilité :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|y_n - E(X)| < \varepsilon) = 1$$

Théorème 1.5.2 (Théorème centrale limite).

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même lois de probabilité, d'espérance m et de variance σ^2 . alors n est suffisamment grand :

1. La loi de probabilité de $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$
2. La loi de probabilité de $Y_n = \frac{S_n}{n}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

1.6 Exercices

1.6.1 Analyse combinatoire

Exercice 1 Dénombrement

Florent doit répondre à un questionnaire à choix multiples de 4 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles, une seule est juste. Florent répond au hasard.

1. De combien de façons différentes Florent peut-il remplir ce Q.C.M ?
2. Déterminer le nombre de réponses dont aucune ne soit juste
3. Déterminer le nombre de réponse dont au moins une soit juste

Exercice 2 Tirage avec remise

Dans un ensemble de 20 appareils, 5 sont défectueux. On prélève au hasard des échantillons de 3 appareils, chaque prélèvement étant effectué dans la population totale, c'est-à-dire après remise du précédent.

1. Combien peut-on réaliser de tirages différents de 3 appareils ?
2. Combien de tirages ne comporteront aucun appareils défectueux ?
3. Combien de tirages comporteront au moins un appareil défectueux ?
4. Combien de tirages comporteront exactement un appareil défectueux ?
5. Combien de tirages comporteront au moins deux appareils défectueux ?

Exercice 3 Contrôle du stock

Un ouvrier effectue un montage dans lequel entrent trois composants identiques. Le montage est mauvais s'il comporte au moins un composant défectueux.

1. Soit un ensemble de n composants dont un seul est défectueux.
 - (a) Calculer le nombre « a » de tirages différents possibles de 3 composants chacun.
Exemple : Pour $n = 5$ détailler la liste des tirages possibles et vérifier.
 - (b) Déterminer, en fonction de n , le nombre « b » de tirages qui contiennent le composant défectueux ; vérifier à l'aide de l'exemple ci dessus.
 - (c) Déterminer la valeur minimale de n composants pour que le rapport soit au plus égal à 5
2. Soit un ensemble de n composants dont deux sont défectueux. On cherche à déterminer le nombre de mauvais tirage possibles.
 - (a) Résoudre cette équation pour $n=6$
 - (b) Pour n quelconque, déterminer le nombre de tirages ne contenant pas de composant défectueux.
 - (c) En déduire le nombre « c » de mauvais tirages. Vérifier avec le l'exemple ci-dessus. Déterminer la valeur minimale de n pour que le rapport au plus égale à 5

Exercice 4

1. Calculer $\sum_{k=0}^n C_n^k$ puis $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$

2. En utilisant la dérivée de $(1+x)^n$, montrer que $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n2^{n-1}$
3. En utilisant la dérivée seconde de $(1+x)^n$, montrer que $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$
4. En utilisant une primitive de $(1+x)^n$, montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

1.6.2 Calcul de probabilité

Exercice 1 Une situation de non équiprobabilité : le dé truqué

Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit la triple de celle de sortie du 1. Les numéros 1, 2, 3, 4, 5 ayant la même probabilité de sortie.

- Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.
- Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir un numéro pair ».

Exercice 2 Diagramme et tableau en fabrication mécanique

Une usine fabrique des pièces pour l'horlogerie. Une pièce peut être défectueuse à cause d'au moins l'un de deux défauts appelés a et b . On considère un lot de 10 000 pièces dans lequel 2 % des pièces présentent le défaut a , 8 % présentent le défaut b , et 0,16 % présentent simultanément les défauts a et b .

- Faire un diagramme ensembliste (les « patatoïdes ») pour représenter la situation, et déterminer le pourcentage de pièces qui n'ont aucun défaut.
- Dans le tableau ci-dessous, \bar{A} (resp. \bar{B}) est l'ensemble des pièces ne présentant pas le défaut A (resp. B). Reproduire puis compléter ce tableau.

	A	\bar{A}	Total
B			
\bar{B}			
Total			10000

- On choisit au hasard une pièce dans ce lot de 10 000. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - E_1 : « La pièce choisie présente l'un au moins des deux défauts » ;
 - E_2 : « La pièce choisie présente un défaut et un seul » ;
 - E_3 : « La pièce choisie ne présente aucun défaut ».

Exercice 3 Arbre et durée de mise au point

Dans une usine, la mise au point d'un matériel électronique nécessite l'exécution de trois tâches consécutives, notées A , B et C . Un gestionnaire de l'entreprise a relevé sur une longue période les durées nécessaires pour effectuer chacune des trois tâches.

Pour A , une heure ou deux heures ; pour B , quatre heures, cinq heures ou six heures ; pour C , deux ou trois heures.

On admet que, pour chacune des tâches A , B , C , la durée d'exécution ne peut pas prendre à l'avenir d'autres valeurs que celles qui ont été données ci-dessus.

Dans ce qui suit, on appelle « mise au point » un triplet (a, b, c) de trois nombres donnant dans l'ordre (tâche A , tâche B , tâche C) les durées d'exécution des trois tâches.

1. À l'aide d'un arbre, donner toutes les « mise au point » possibles.
2. Chaque « mise au point » définit un événement élémentaire. L'observation sur une longue période conduit à admettre que tous les événements élémentaires sont équiprobables.
3. Déterminer la probabilité des événements suivants :
 - (a) E_1 : « La mise au point dure huit heures » ;
 - (b) E_2 : « La mise au point dure au plus neuf heures » ;
 - (c) E_3 : « La mise au point dure strictement plus de neuf heures ».

Exercice 4 Une situation de référence : Tirages dans une urne

Dans tout cet exercice, les résultats seront exprimés sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules rouges. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1. **Tirages successifs avec remise** : On tire successivement 3 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - (a) 2 boules blanches et une boule rouge, dans cet ordre ?
 - (b) 2 boules blanches et une boule rouge dans un ordre quelconque ?
 - (c) au moins une rouge ?
2. **Tirages successifs sans remise** : Reprendre les questions précédentes, mais en supposant cette fois que l'on tire successivement 3 boules, la boule tirée n'étant pas remise dans l'urne après chaque tirage.
3. **Tirages simultanés** : On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - (a) 2 boules blanches et une boule rouge ?
 - (b) au moins une rouge ?

Exercice 5 Probabilités conditionnelles

Deux machines M_A et M_B produisent chaque jour respectivement 100 et 200 pièces du même modèle. La machine A sort 5% de pièces défectueuses, la machine M_B en sort 6%.

1. Faire un diagramme ensembliste pour représenter la situation journalière.
2. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant qui résume la situation journalière :

	Nombre de pièces produites par M_A	Nombre de pièces produites par M_B	Total
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			300

3. Un jour donné, on choisit au hasard une pièce parmi la production des deux machines. On admet que l'on est dans une situation d'équiprobabilité. On considère les événements suivants :

A : « La pièce choisie provient de la machine M_A »

B : « La pièce choisie provient de la machine M_B »

D : « La pièce choisie est défectueuse »

\bar{D} : « La pièce choisie n'est pas défectueuse »

Calculer la probabilité des événements suivants :

$$A, \quad B, \quad D, \quad \bar{D}, \quad A \cap D, \quad B \cap \bar{D}.$$

4. On note $p_D(A)$ la probabilité de l'événement « A sachant D », autrement dit la probabilité que la pièce choisie provienne de la machine M_A , sachant que cette pièce est défectueuse.
- Déterminer les probabilités $p_D(A)$ et $p_{\bar{D}}(B)$.
 - À l'aide des questions précédentes, vérifier que l'on a bien

$$p_D(A) \times p(D) = p(A \cap D) \quad \text{et} \quad p_{\bar{D}}(B) \times p(\bar{D}) = p(B \cap \bar{D})$$

Exercice 6 Imprimerie et probabilités conditionnelles

Dans une imprimerie, la fabrication journalière d'un quotidien conduit à deux défauts de fabrication :

- le défaut D : « présence de taches d'encre sur la dernière page du journal » ;
- le défaut A : « présence de taches d'encre sur la page des offres d'emplois ».

La probabilité qu'un journal, pris au hasard dans la fabrication, présente le défaut D est 0,0045.

La probabilité qu'un journal, pris au hasard dans la fabrication, présente le défaut A est 0,0025.

La probabilité qu'un journal, pris au hasard dans la fabrication, présente le défaut D sachant qu'il présente le défaut A est 0,8.

On choisit un journal au hasard dans la fabrication.

- Calculer la probabilité qu'il présente les deux défauts.
- Calculer la probabilité qu'il présente le défaut A sachant qu'il présente le défaut D .
- Calculer la probabilité qu'il présente au moins un défaut.

1.6.3 Variables aléatoires

Exercice 1 Dans une urne...

Dans cet exercice, les tirages sont équiprobables.

Une urne contient quatre boules noires et quatre boules blanches. On tire simultanément quatre boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules noires tirées.

Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance mathématique et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de son écart-type.

Exercice 2 Urne et loi binômiale

Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 18 boules rouges indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à extraire au hasard, l'une après l'autre et sans remise, deux boules de l'urne. On est dans une situation d'équiprobabilité. On donnera, pour chaque résultat, la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

1. Déterminer la probabilité de l'événement E : « La première boule tirée est blanche ».
2. On répète cinq fois de suite l'expérience précédente. Après chaque épreuve, les deux boules tirées sont remises dans l'urne. Les cinq épreuves élémentaires précédentes sont donc indépendantes.
3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie de cinq épreuves, associe le nombre de fois que se produit l'événement E .
4. Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 3 Prévisions de vente – Fonction de répartition

Une entreprise de fournitures industrielles commercialise des pièces de rechange pour pompes hydrauliques. On a relevé sur une longue période le nombre de pièces de type A vendues. L'étude statistique permet d'admettre que la variable aléatoire X qui associe à un jour ouvrable choisi au hasard pendant un mois le nombre de pièces vendues ce jour-là a une loi de probabilité définie par le tableau suivant.

On donnera les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près des résultats.

nombre x_i de pièces vendues	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0, 10	0, 16	0, 25	0, 30	0, 13	0, 05	0, 01

1. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente $E(X)$?
3. Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X .

Exercice 4 La loterie

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le numéro de la porte de sortie franchie. Sa loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 2 Euros ; il reçoit 12 Euros si la bille franchit les portes 1 ou 6, 2 francs si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien. Le « gain » d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise. Le gain peut donc être éventuellement un nombre négatif ou nul.

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque partie effectuée par un joueur donné associe le gain.

1. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
2. Déterminer la loi de probabilité de Y .

3. Un jeu est équitable si l'espérance de gain est nulle. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 5 Un cas d'école

On considère une épreuve aléatoire débouchant sur deux éventualités : succès et échec, de probabilités respectives 0,7 et 0,3.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k de succès.

On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k d'échecs.

1. Quelles sont les lois suivies par X et Y ?
2. Déterminer, en fonction de n , l'expression de :

$$P(X = k), \quad P(Y = k), \quad P(X = 0), \quad P(X \geq 1), \quad P(Y = n).$$

3. On suppose que $n = 10$. Calculer

$$P(X = 0), \quad P(X = 2), \quad P(X \leq 2), \quad P(X > 2).$$

4. Toujours avec $n = 10$, déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X .

Exercice 6 Loi binômiale dont un paramètre est à déterminer

On désigne par X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et 0,01, notée $\mathcal{B}(n; 0,01)$.

1. Déterminer n pour que $P(X = 0) \leq 0,01$.
2. Déterminer n pour que $P(X \geq 1) \geq 0,90$.

Exercice 7 Loi de Poisson : détermination du paramètre

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson. Déterminer à 10^{-2} près le paramètre λ sachant que $P(X = 0) = 0,3$.

(Indication : Utiliser la définition de la loi de Poisson.)

Exercice 8 Il faut ... éliminer !

Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 3.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. « Un tel lot n'a aucune bouteille défectueuse »
2. « Un tel lot a deux bouteilles défectueuses »
3. « Un tel lot a trois bouteilles défectueuses ».

Exercice 9 Loi normale centrée réduite

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer :

1. $p(X \leq 0,85)$.
2. $p(X \geq 0,85)$.
3. $p(X \leq -0,85)$.
4. $p(-1,96 \leq X \leq 1,96)$.
5. $p(X \geq -1,96)$.

Exercice 10 Loi normale, lecture inverse de la table

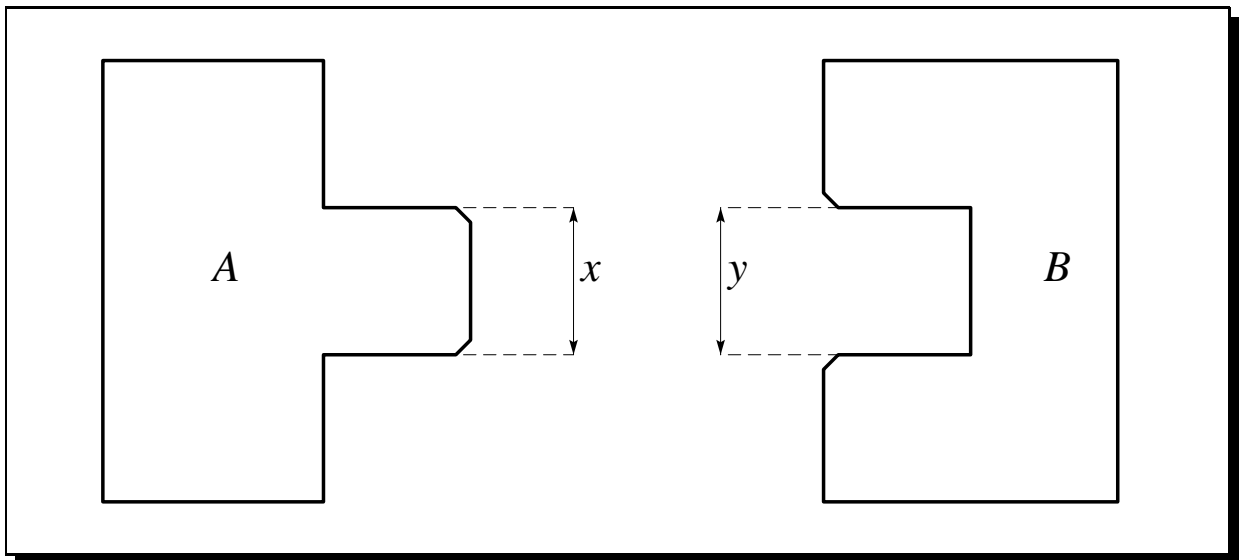
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer le nombre a tel que :

1. $p(X \leq a) = 0,99$.
2. $p(X \leq a) = 0,01$.
3. $p(X \geq a) = 0,05$.
4. $p(X \geq a) = 0,90$.

exerciceBTS

Exercice 11 Ajustements et probabilités

Une usine produit des pièces de type A qui doivent s'ajuster dans des pièces de type B .



1. Les différentes valeurs prises par la cote x permettent de définir une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 20, d'écart-type 0,04.
 - (a) Déterminer la probabilité pour qu'une pièce de type A soit acceptable sachant que sa cote x doit être comprise dans l'intervalle $[19,92; 20,08]$.
 - (b) On suppose maintenant que la proportion de pièces défectueuses de type A réalisées est 0,05. On prélève des échantillons de 100 pièces. Soit T la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pièces défectueuses d'un échantillon.
 - • Quelle est la loi de probabilité de T ? On admettra qu'on peut l'assimiler à une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.
 - • Déterminer la probabilité de l'événement : $[T < 4]$
2. Les différentes valeurs prises par la cote y permettent de définir une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 20,1 et d'écart-type 0,03. On suppose d'autre part que les pièces de type A et B peuvent s'assembler si le jeu entre les cotes, $y - x$, est au moins égal à 0,01.

3. On rappelle que si X et Y sont des variables aléatoires suivant des lois normales de moyennes m_x et m_y , de variances V_x et V_y , alors $Y - X$ suit une loi normale de moyenne $m_y - m_x$ et de variance $V_x + V_y$.
- (a) Déterminer la moyenne et l'écart-type de la variable $Y - X$.
 - (b) Quelle est la probabilité qu'une pièce de type A prise au hasard puisse être introduite dans une pièce de type B également prise au hasard?