Exercice. 13

Soit la fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x+3} - 1}$

1°/ Vérifier que $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{x+3} - 1}$.

$(x^2 - x - 6) = (x+2)(x-3) \iff x = -2$ et $x = 3$ sont des racines de $(x^2 - x - 6)$.

pour $x = -2$ on a : $4 + 2 - 6 = 0$

pour $x = 3$ on a : $9 - 3 - 6 = 0$

Ainsi $x = -2$ et $x = 3$ sont des racines de $x^2 - x - 6$, donc le numérateur peut se mettre sous la forme $(x+2)(x-3)$

2. Ensemble de définition.

$\exists\, f(x) \iff \sqrt{x+3} \geqslant 0$ et $\sqrt{x+3} - 1 \neq 0$.

soit D_{f_1} $\sqrt{x+3} \geqslant 0 \iff x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3$

$D_{f_1} : \exists f_1 \iff x \in [-3, +\infty[$

Soit D_{f_2} $\sqrt{x+3} - 1 \neq 0 \iff \left(\sqrt{x+3}\right)^2 \neq 1^2$

$x + 3 \neq 1$

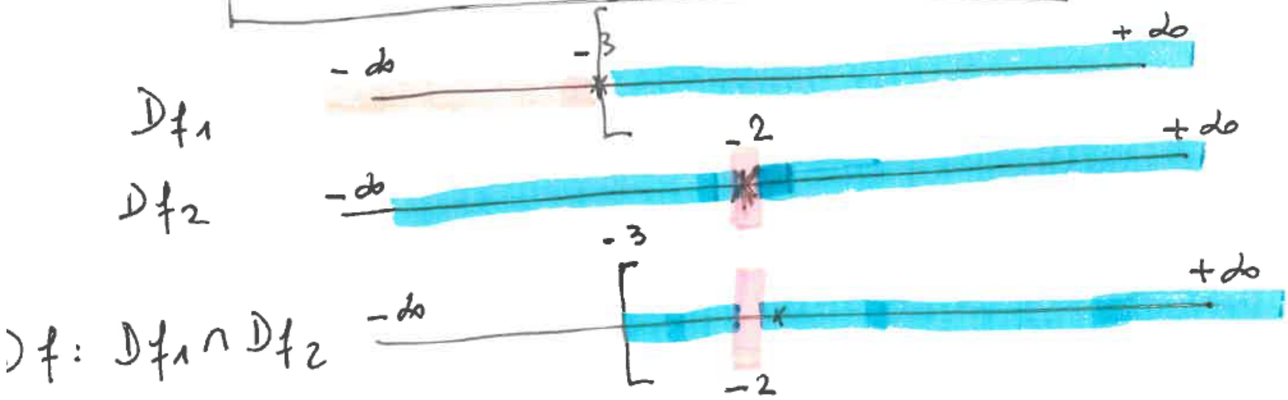
$x \neq -2$.

$D_{f_2} = \,]-\infty, -2[\, \cup \,]-2, +\infty[$

Ainsi $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$

$D_f = [-3 ; +\infty[\;\cap\;]-\infty ; -2[\, \cup \,]-2, +\infty[$

$$\boxed{D_f = [-3, -2[\, \cup \,]-2, +\infty[}$$



3. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{0}{1-1} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{0}{0}$: forme indéterminée.

pour lever l'indétermination, on multiplie la fonction par le binôme conjugué du dénominateur (cours : page 17).

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)} = \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3})^2 - 1^2}$$

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x+3}+1)}{x+3-1} = \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)}$$

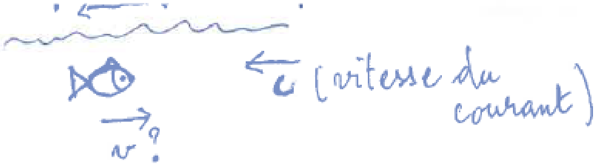
On simplifie $f(x)$ par $x+2$ et on a :

$$f(x) = (x-3)(\sqrt{x+3}+1)$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to 2} (-2-3) \times (\sqrt{-2+3}+1) = -5 \times (1+1)$$

$$\boxed{\lim_{x \to -2} f(x) = -10}$$

Exercice 14



L'énergie E nécessaire à un poisson pour nager contre un courant de vitesse c dépend de sa propre vitesse v et de la distance d à parcourir.

$$E = \frac{a v^3 d}{v - c}$$

Déterminer v pour laquelle l'énergie dépensée est minimale.

Pour avoir v.

1. E est minimale si $\frac{dE}{dv} = 0$ (dérivée)

c'est un minimum $\Longleftrightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} > 0$ page 22

pour que

2. et $\frac{d^2E}{dv^2} > 0$ (définition de la dérivée seconde.)

① Détermination de la valeur de v.

$\frac{dE}{dv} = ?$ Posons $u = adv^3 \longrightarrow u' = 3adv^2$

$V = v - c \longrightarrow V' = 1$

$$\frac{dE}{dv} = \left[\frac{av^3d}{v-c}\right]' = \frac{Vu' - uV'}{V^2} = \frac{(v-c)(3adv^2) - adv^3}{(v-c)^2}$$

Au numérateur, on met av^2d en facteur.

$$\frac{dE}{dv} = \frac{av^2d\left[3(v-c) - v\right]}{(v-c)^2} = \frac{av^2d\left[2v - 3c\right]}{(v-c)^2}$$

donc $\frac{dE}{dv} = 0 \Longleftrightarrow 2v - 3c = 0 \Longleftrightarrow \boxed{v = \frac{3c}{2}}$

② Il faut ensuite qu'on ait $\frac{d^2E}{dv^2} > 0$

$$\frac{d}{dv}\left[\frac{av^2d[2v-3c]}{(v-c)^2}\right] > 0$$

Pour le numérateur :

$u = 2av^3d - 3acv^2d \rightarrow u' = 6av^2d - 6acvd$

$V = (v-c)^2 \rightarrow V' = 2(v-c) \times 1.$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} = \frac{(v-c)^2 \times [6av^2d - 6acvd] - [2av^3d - 3acv^2d][2(v-c)]}{(v-c)^4}$$

$$\frac{(v-c)\left[(v-c)\left[6avd(v-c)\right] - av^2d[2v-3c] \times 2\right]}{(v-c)^4}$$

Après simplification on a :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} = \frac{2adv(v^2 - 3vc + 3c^2)}{(v-c)^3}$$

avec $v = \frac{3c}{2}$ on a : $\frac{}{4}c^2 - \frac{18}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$

or $c > 0$ donc $\frac{3}{4}c^2 > 0$

ainsi la condition ② $\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} > 0$, donc on a bien un minimum.

Ainsi la vitesse minimum pour que le poisson avance est $\boxed{v = \frac{3c}{2}}$

Exercice 15

$$f : x \longmapsto \frac{2x-1}{x-2}$$

$$g : x \longmapsto x^2$$

1°/ Ensemble de défintion.

pour f, $\exists f \iff x-2 \neq 0 \iff x \neq 2$.

$\implies D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

g, $\exists g \; \forall x \implies D_g = \mathbb{R}$

2°/ $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$

$\exists f \circ g(x) \iff x^2 - 2 \neq 0 \iff x^2 \neq \pm 2$

$\iff x \neq \pm\sqrt{2}$.

$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2} ; +\sqrt{2}\}$.

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left[\dfrac{2x-1}{x-2}\right] = \left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)^2$

$\exists g \circ f(x) \iff (x-2)^2 \neq 0 \iff x \neq 2$

$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.