UFR Sciences et Techniques

Traitement des données médicales

- Traitement du signal médical

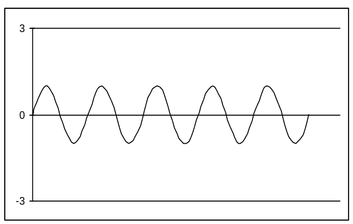
IBIOM-M2

Su Ruan

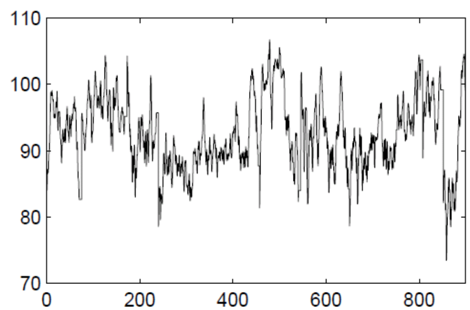
UNIVERSITÉ DE ROUEN

Introduction

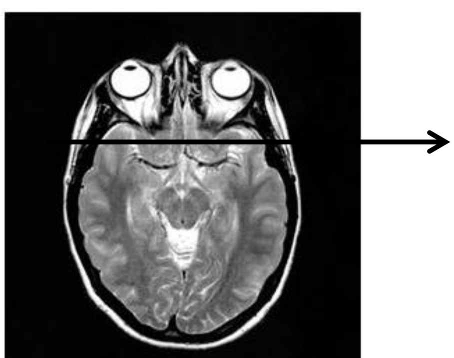
- Signal
  - Représentation d'une information
  - Entité qui sert à véhiculer une information
- Domaine temporel *s(t)* ou spatial *s(n)*

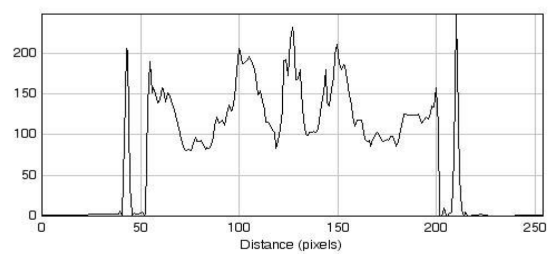


t



t

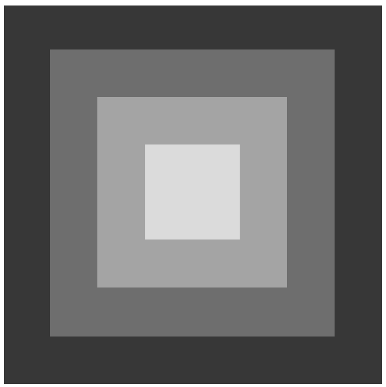


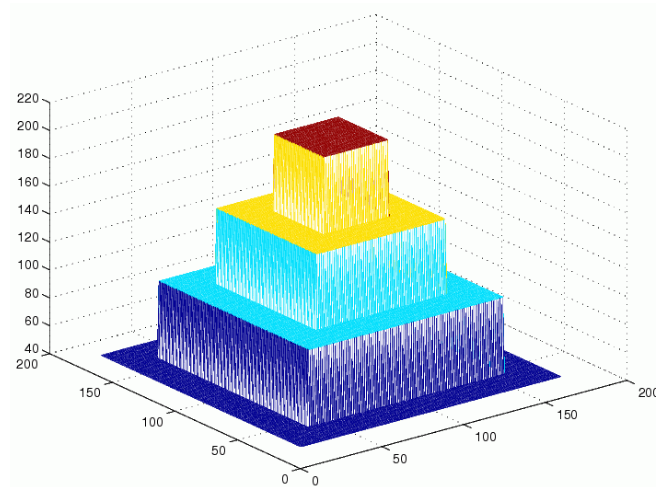


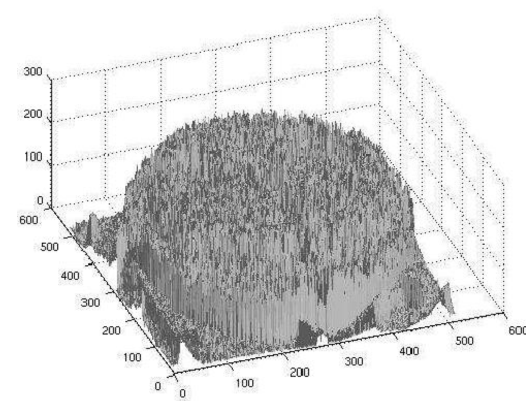
n

Introduction

➢Signal 2D







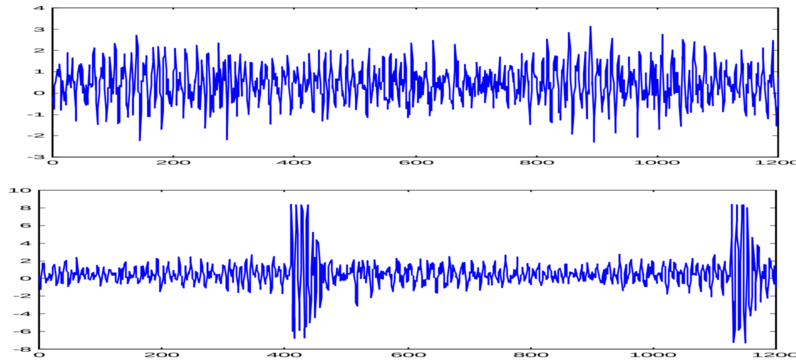
* Images du cours de TélécomParis

Introduction

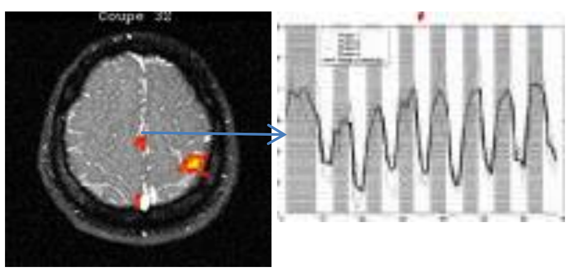
- Traitement du signal
  - Ensemble de techniques (dans les domaines temporel ou fréquentiel) permettant de créer, d'analyser, de transformer les signaux en vue de leur exploitation
  - Extraction du maximum d'information utile d'un signal perturbé par le bruit
    - Filtrage des signaux
    - Détection des signaux

Introduction

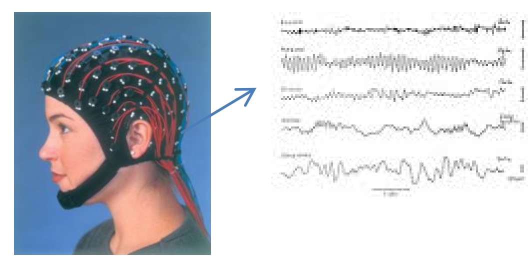
➢Exemples



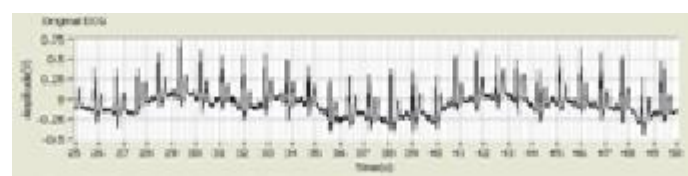
Détection des défauts



IRMf



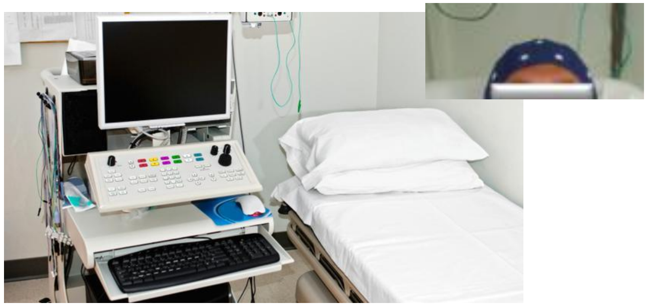
EEG (électroencéphalographie)



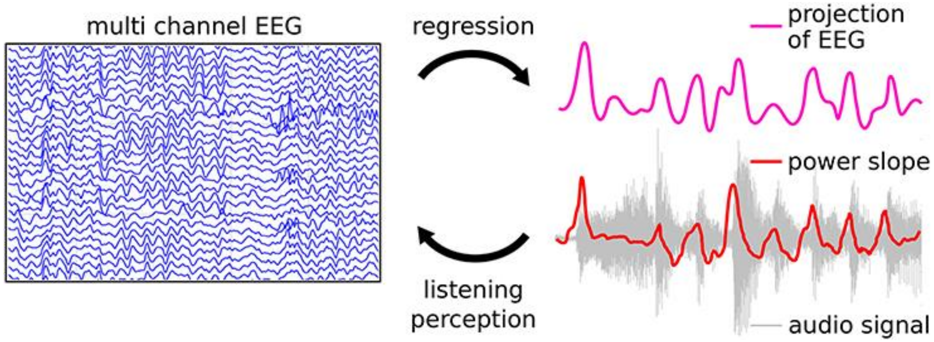
ECG (l'électrocardiogramme)

Electroencéphalographie (EEG)

- Un examen pour mesurer l'activité électrique du cerveau
  - Il est basé sur la mesure de l'activité électrique du cerveau effectuée à partir d'électrodes implantées sous la surface du crâne
  - Le signal électrique à la base de l'EEG est la résultante de la sommation des potentiels post-synaptiques synchrones issus d'un grand nombre de neurones.
- Objectif
  - renseigner sur l'activité neurophysiologique du cerveau au cours du temps et en particulier du cortex cérébral soit dans un but diagnostique en neurologie, soit dans la recherche en neuroscience cognitives



EEG (électroencéphalographie)



Regression approach for extracting neural correlates of music perception.

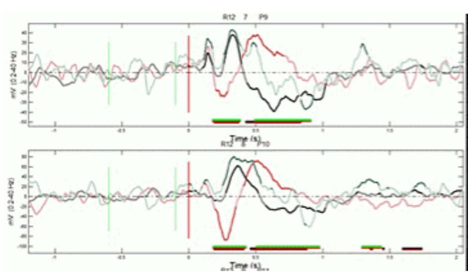
Amplitude : 5 à 100 μV, Fréquence: de 1 à 50 Hz

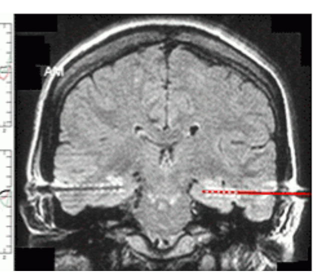
Electroencéphalographie (EEG)

- L'EEG permet de mesurer l'activité cérébrale avec une grande précision temporelle, milliseconde par milliseconde. Elle renseigne donc sur d'éventuelles altérations fonctionnelles dans la dynamique de l'activité neuro-électrique (ralentissement, activité EEG pathologique, organisation « critique » de l'activité…).
- Les signaux EEG mettent en évidence certaines figures graphiques tels que les pointes et les pointes ondes qui permettent de s'orienter vers un diagnostic d'épilepsie.
- L'EEG contribue aussi à apprécier le retentissement du traitement ou à mesurer les effets d'un réajustement thérapeutique.

A noter:

- Il est difficile de déterminer quelles sont les structures cérébrales d'où provient le signal EEG qu'il soit normal ou pathologique. Par conséquent, l'EEG est souvent utilisé conjointement avec d'autres techniques d'imagerie cérébrale (TEP, scanner, IRM).

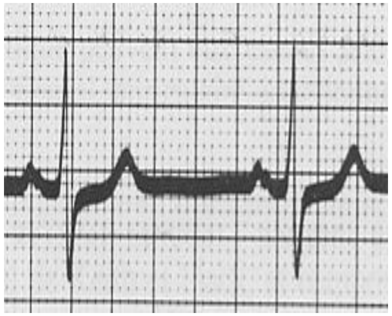




Electrocardiogramme (ECG)

- Un examen pour enregistrer l'activité cardiaque
  - Il est basé sur la mesure des courants électriques traversant l'organe à chacune de ses contractions
  - Chaque battement du cœur est assuré par une impulsion électrique, aussi appelée « onde » le traversant. C'est cette activité électrique qui est captée par l'électrocardiographe, l'appareil permettant d'obtenir l'**électrocardiogramme**, *via* des électrodes (ou capteurs) positionnées sur le corps.
- L'ECG permet de détecter de nombreuses anomalies.
- L'analyse d'un ECG est importante pour le cardiologue qu'il exploite en fonction de l'état de santé de son patient, de ses symptômes et des examens complémentaires (échographie ou radiographie du thorax).

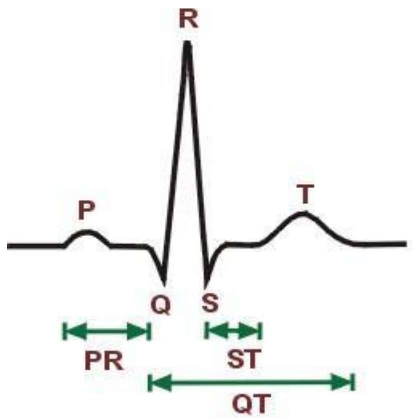
Amplitude : ≈ 1 mV, Fréquence: ≈ 1 Hz



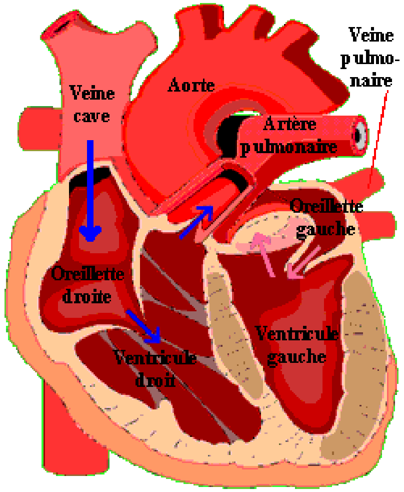
: 1 division → 0,20 s.

Electrocardiogramme (ECG)

- Un battement cardiaque normal laisse une empreinte typique sur l'ECG décomposé en plusieurs signaux :
  - L'onde P est la représentation de la contraction des oreillettes
  - L'espace entre P et Q est le temps nécessaire à l'influx nerveux pour aller des oreillettes aux ventricules
  - Le complexe QRS traduit la contraction des ventricules
  - Le segment ST représente la fin de la contraction ventriculaire
  - L'onde T correspond à la relaxation des ventricules.
- Le cardiologue mesure la durée et l'amplitude de chaque onde constituant un battement cardiaque et celle du temps écoulé entre chaque phase de la contraction.



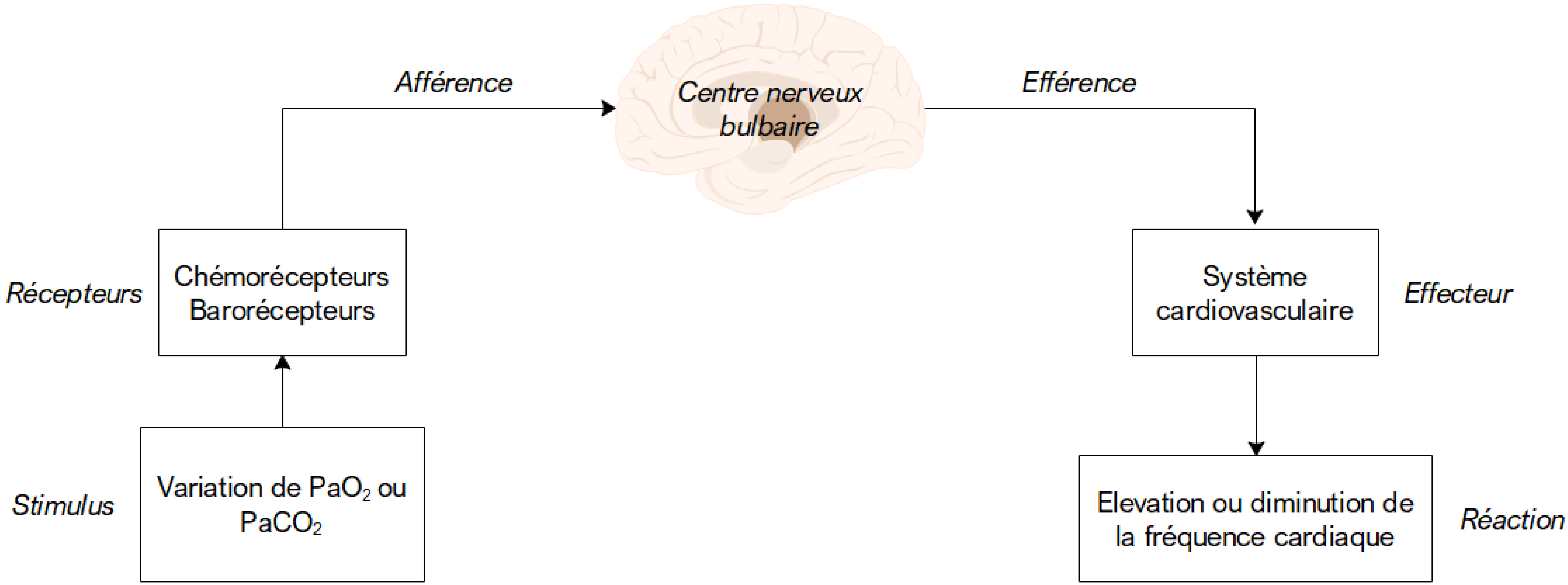
Un battement cardiaque



Exemple, une torsade de pointe (anomalie du rythme des ventricules potentiellement mortelle) se traduit sur l'ECG par un allongement de la durée séparant l'onde Q et l'onde T

Electrocardiogramme (ECG)

- Système respiratoire
  - Le couplage cardio-respiratoire



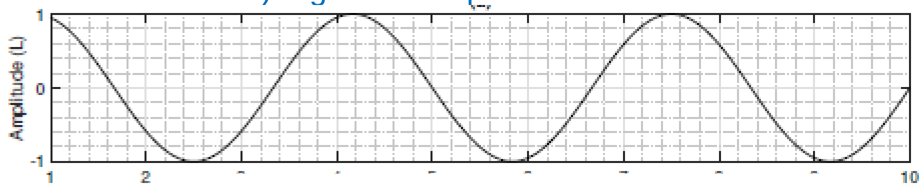
PaO2 et PaCO2: pressions partielles en CO2 et O2

Electrocardiogramme (ECG)

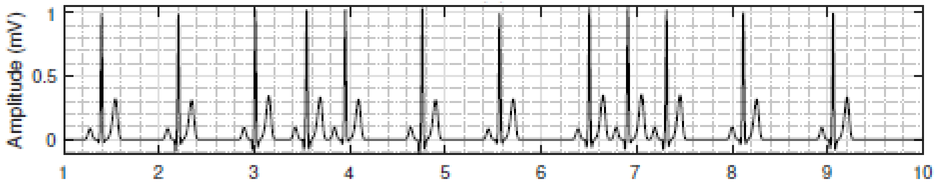
➢Système respiratoire

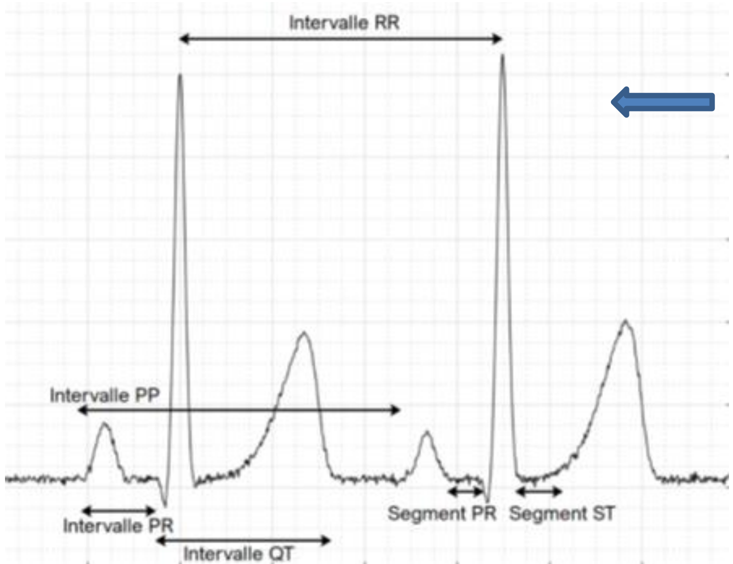
➢Le couplage cardio-respiratoire

a) Signal de respiration



b) Voie d'électrocardiogramme





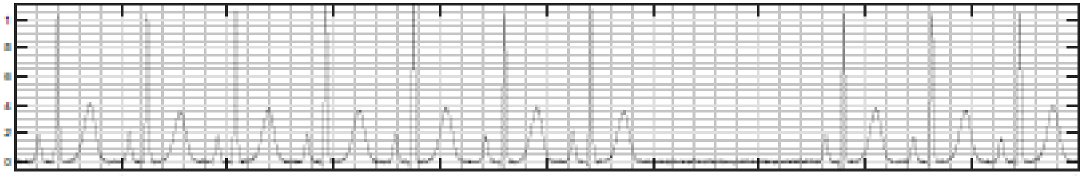
Un signal sain avec ces principaux intervalles et segments

- ➢ Le rythme cardiaque, à ne pas confondre avec la fréquence cardiaque (nombre de cycle cardiaque par minute), désigne l'origine et la propagation de l'activité électrique du cœur.
- ➢ il faut que l'intervalle RR soit constant avec des complexes QRS similaires et une onde P associée.

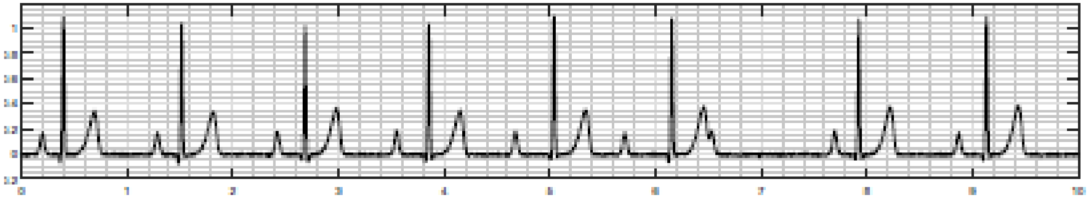
Electrocardiogramme (ECG)

- De l'importance des méthodes automatiques d'analyses ECG
  - Quelques troubles cardiaques

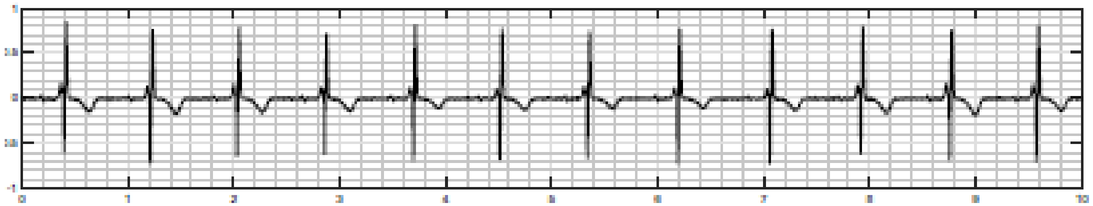
Bloc sino-auriculaire de type II. On observe une pause de l'activité cardiaque



Bloc auriculo-ventriculaire de type II Mobitz I. On observe un allongement de l'intervalle PR à intervalle RR constant, jusqu'au blocage d'une onde P

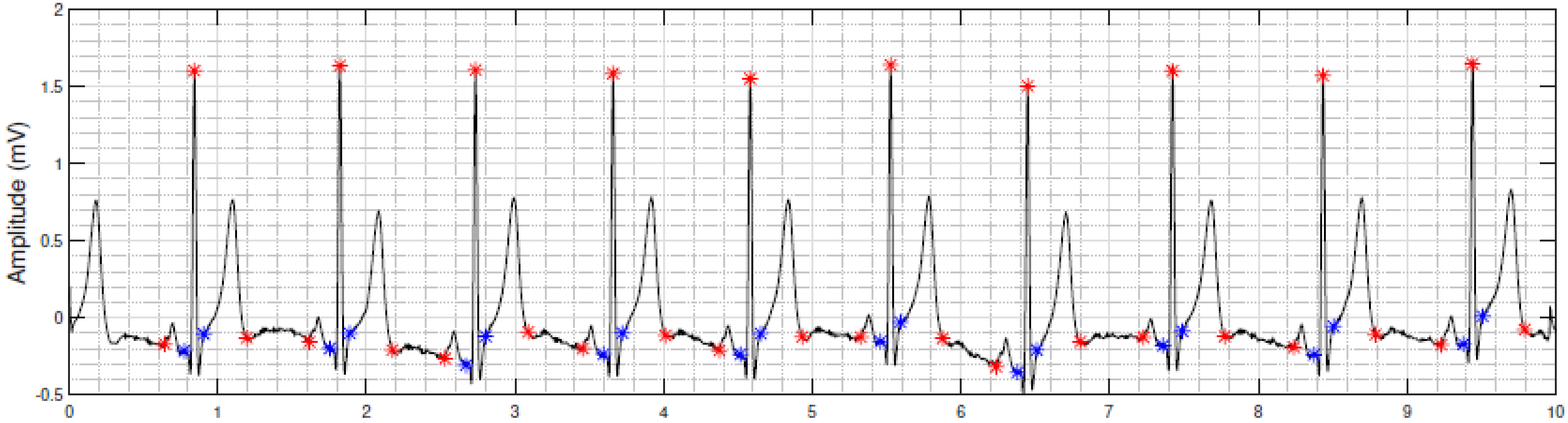


Bloc de branche droit. On observe un complexe QRS de type rSR' sur une voie V1 où le complexe devrait être de la forme rS



Electrocardiogramme (ECG)

➤Détection

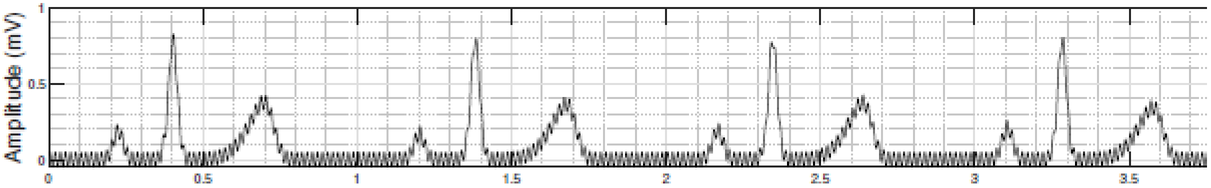


Electrocardiogramme (ECG)

➢Problèmes

➢Interférence secteur 50 Hz

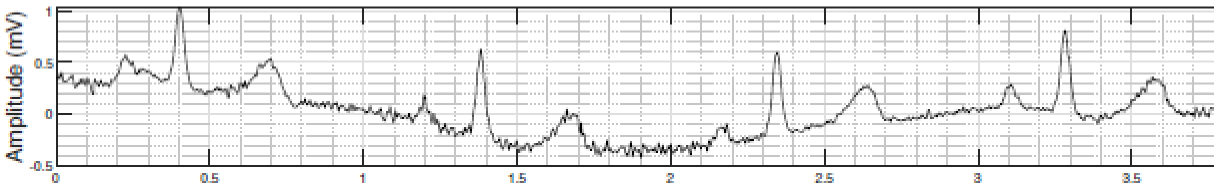
➢en cause, le mauvais isolement des câbles utilisés



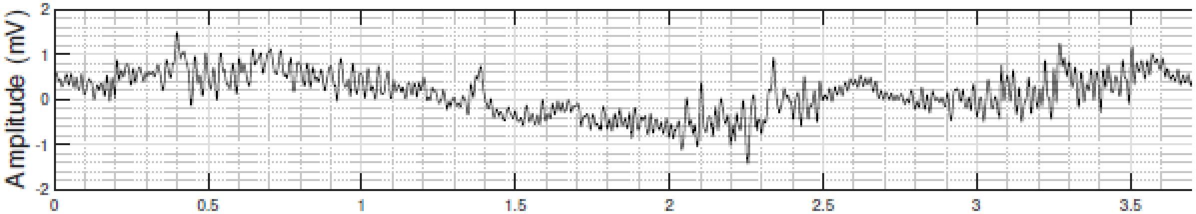
➢La dérive de la ligne de base

➢ en cause la respiration, des mouvements brusques, des ruptures rapides du contact peau-électrode, etc

➢L'artefact qui peut perturber le plus un signal ECG dans son interprétation.

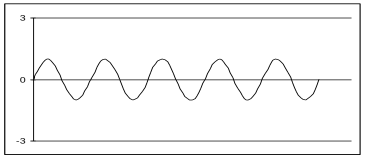


➢Du bruit

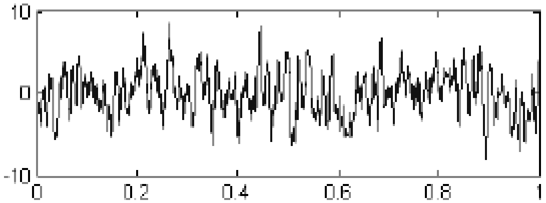


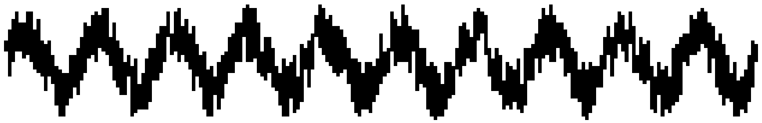
Signaux aléatoires

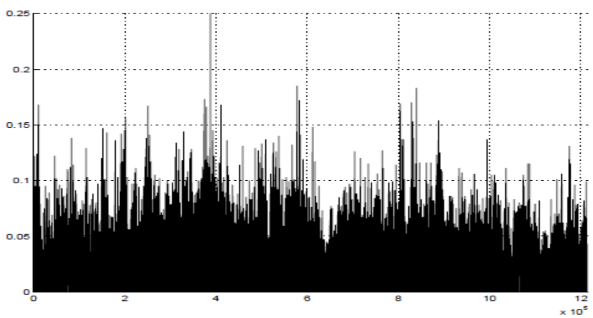
- Signaux déterministes dont on peut connaitre les valeurs avant de les avoir observés



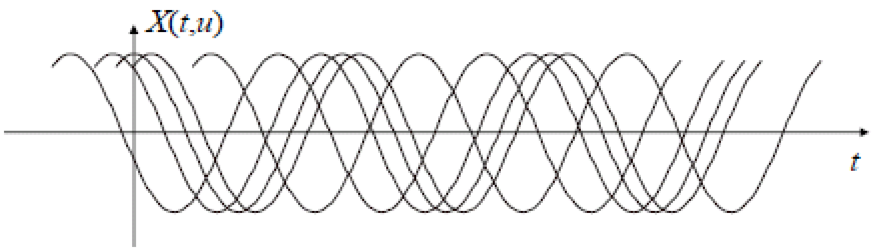
- Signaux aléatoires dont on ne peut connaitre les valeurs avant de les avoir observés : imprévisibles.







$$X(t,u) = A\cos(\omega t + u)$$



Outils de base : Systèmes linaires

- Réponse à une impulsion unité

0

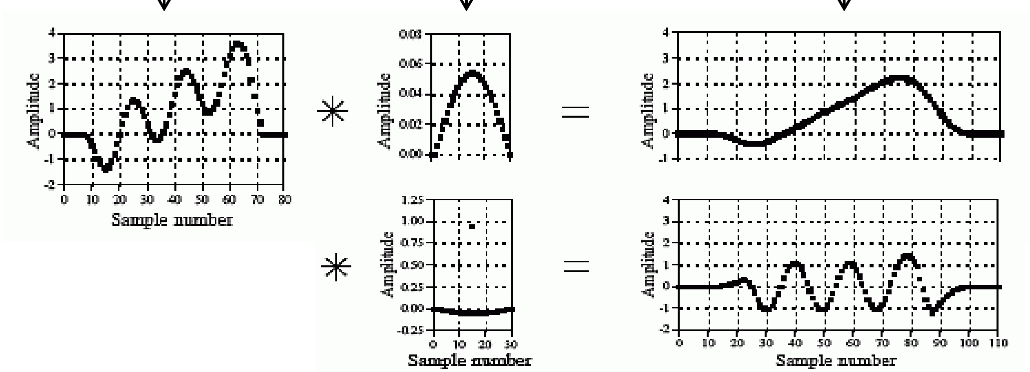
δ(n) → ***système inconnu*** → *h(n)*

Il est linéaire si la séquence

x(n) → ***h(n)*** → y(n) = x(n) * h(n)

Symbole * : produit de convolution

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) \cdot h(n-l)$$



Outils de base : Systèmes linaires

➢ Propriétés

- Linéarité

$$y(n) = h(n) * (\lambda x(n)) = \lambda(h * x(n))$$

$$y(n) = h(n) * (x_1(n) + x_2(n)) = y_1(n) + y_2(n) \quad \text{où } y_1(n) = x_1(n) * h(n)$$

$$y_2(n) = x_2(n) * h(n)$$

Ex: y(n)=2x(n)+3 => linaire?

- Invariant dans le temps

$$y\ (n - n_0) = x(n - n_0) * h(n)$$

- Causalité

La sortie à l’instant n=n0 ne dépend que des entrées aux instants précédents et courants.

$$y(n) = \sum_{l=0}^{+\infty} x(l) \cdot h(l - n)$$

- Stabilité

$$\sum_{n} |h(n)| < \infty$$

$$Ex : y\ (n) = 3x(n+1) + 5x(n-2)$$

Outils de base : Systèmes linaires

- Transformée en z
  - Définition

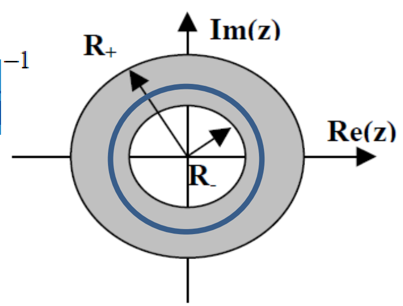
$$TZ(x(n)) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n} \qquad X(z_1,z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(k,l)\cdot z_1^{-k} z_2^{-l}$$

$$X(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\cdot z^{-n}}_{X_1(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\cdot z^{-n}}_{X_2(z)}$$

    - $X_2(z)$ est appelée partie causale de la transformée en Z et $X_1(z)$ partie anti-causale.
  - Convergence d'un filtre
    - Un filtre numérique linéaire et causal est stable ssi tous les pôles de X(z) sont à l'intérieur du cercle unité.

$$R_+ = \left[\lim_{k\to+\infty} |x_{-k}|^{\frac{1}{k}}\right]^{-1}$$

$$R_- = \lim_{k\to+\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}}$$



  - Propriété

$$TZ[x(n-1)] = z^{-1}X(z) + x_{-1}$$

$$TZ[x(n+1)] = zX(z) - x_0 z$$

Outils de base : Systèmes linaires

- Equation aux différences

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

x(n): signal d'entrée
y(n): signal de sortie

- Fonction de transfert en *z*

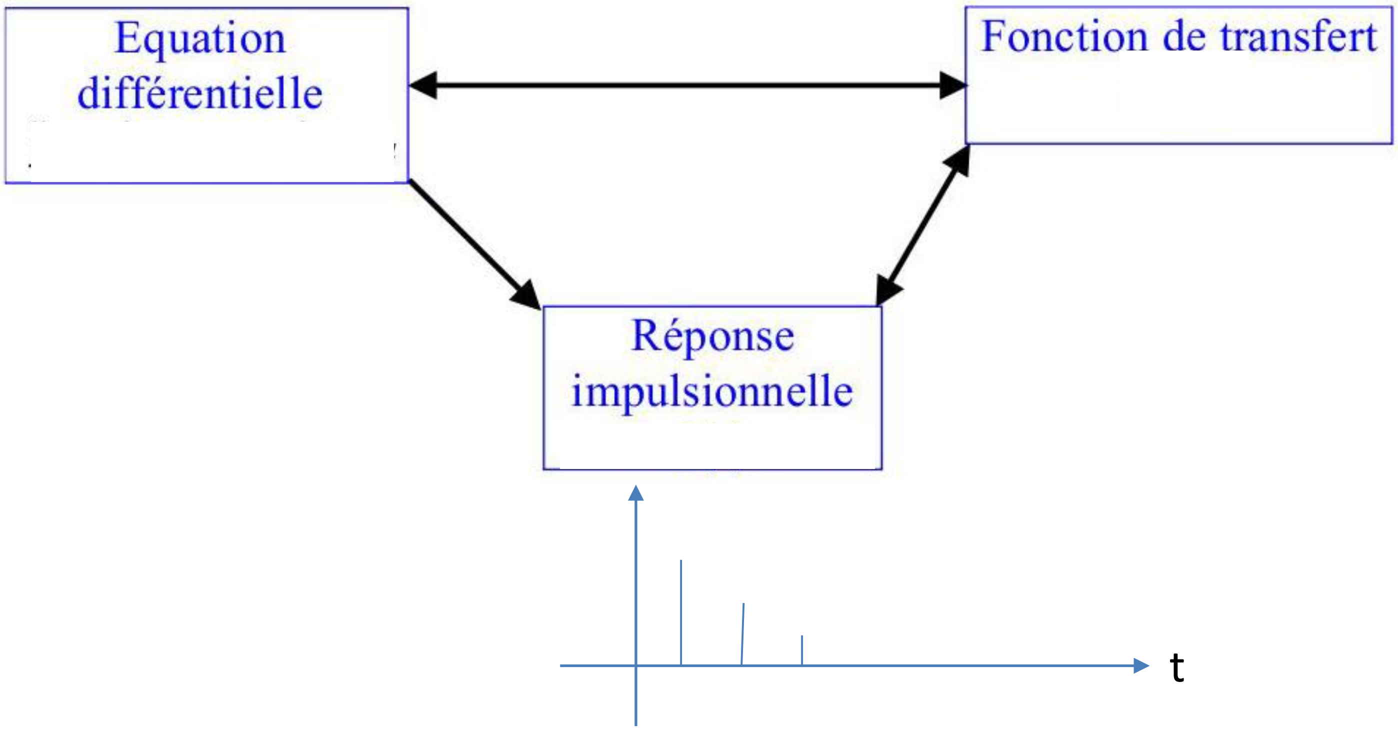
$$H(z) = \frac{b_M z^{-M} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}$$

- Réponse impulsionnelle

$$Ex : y(n) = ca^n U(n) \qquad U(n) = 0 si \;\; n < 0$$

Outils de base : Systèmes linaires

- Représentation des systèmes linéaires invariants
  - Equivalence des représentations
    - Il y a équivalence entre chacune des représentations



Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

- Signal à temps discret $x_n = x(nT)$

- Transformée de Fourier

$$X(f) = \sum_{n} x_n e^{-2j\pi nfT}$$

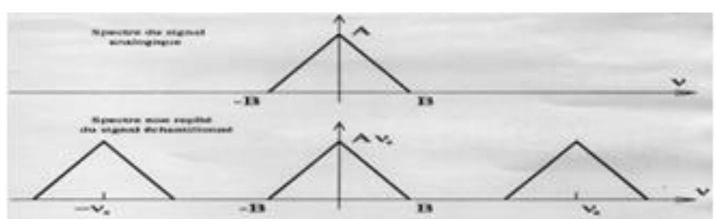
- Transformé de Fourier inverse (série de Fourier)

$$x_n = T \int_{<1/T>} X(f) e^{2j\pi nfT} df$$

- Discrétisation en temporel → Périodisation en fréquentiel

TF[x(t)] →

TF[x(nT)] →



Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

- **Temps et fréquence périodiques (de longueur N)**
  - Discrétisation en temporel → Périodisation en fréquentiel
  - Discrétisation en fréquentiel → Périodisation en temporel

Suite *x(n)* périodique de période N

TFD ↓ ↑ TFD inverse

Suite *X(k)* périodique de période N

- **Réalisation : algorithmes rapides (FFT)**
  - Le nombre de points est toujours 2^n, n: nombre entier positif.
  - Ex: en utilisant un algorithme FFT pour N= 1024 (2^{10}), le temps de calcul peut être divisé par un facteur environ 1000 par rapport à l'utilisation directe de la définition.

Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

- Analyser le contenu fréquentiel d'un signal x(t)

  ⟹ Estimation de la transformée de Fourier des signaux

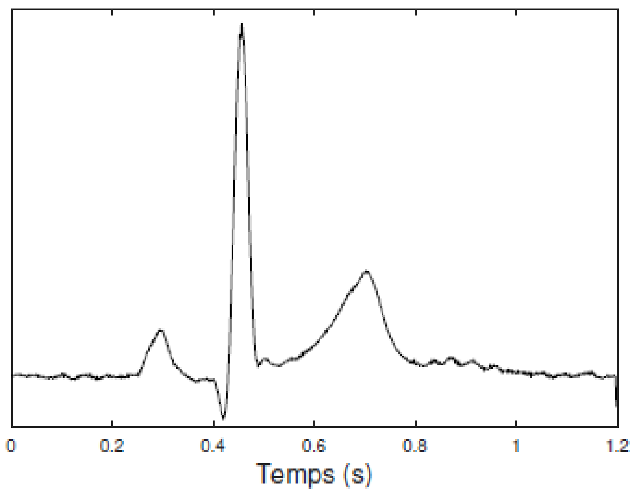
  Les opérations suivantes sont imposées :

  - Echantillonnage de x (t)
    - choix de la fréquence d'échantillonnage f_e fixé par le théorème de Shannon
  - Quantification pour générer le signal discret x(n)
  - Troncature de x(n) à N échantillons
  - Discrétisation du domaine fréquentiel

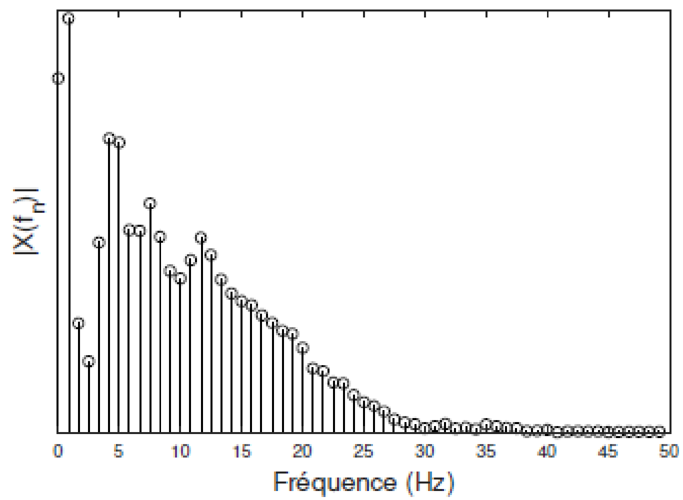
Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

➢Analyser le contenu fréquentiel d'un signal x(t)

→ Estimation de la transformée de Fourier des signaux



TF



Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

➢Troncature du signal continu (fenêtrage temporel)

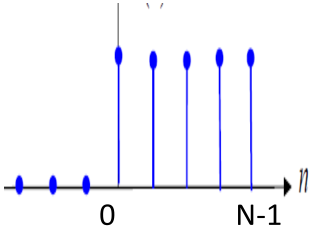
- Un signal continu $x_c(t)$ est échantillonné à la fréquence f_e (=1/T_e) :

$$x(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_c(t)\delta(t - lT_e)$$

- Le signal résultant de la troncature (soit T_e=1) est représenté par:

$$x_N(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\delta(l-n) = x(n)h(n) \quad \xrightarrow{\text{TF}} \quad X_N(f) = X(f) * H(f)$$

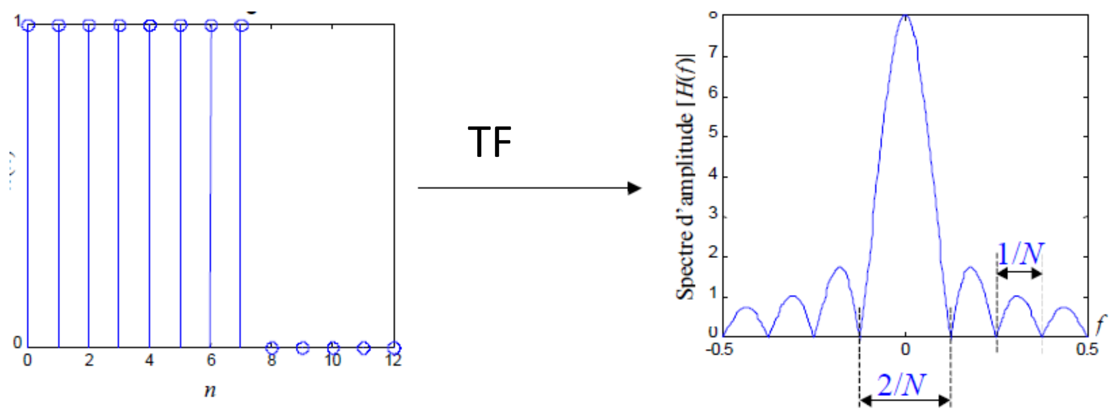
avec fenêtre rectangulaire de largeur *N :* $h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

➢ Influences du fenêtrage temporel

- Si x(n) est limité à N points (fenêtrage), il y aura une apparition d'un lobe principal de largeur 2/N dans le spectre $X_N(f)$.
- La résolution en fréquence est de l'ordre de 1/N (ou f_e /N).



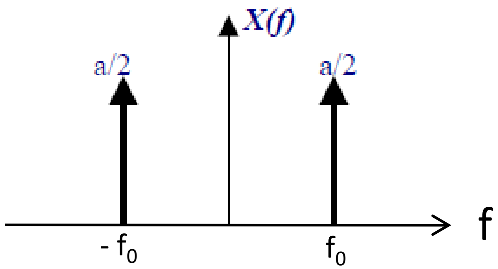
h(n)

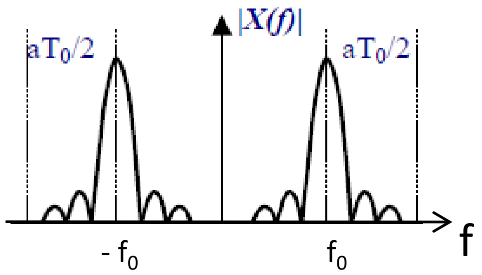
$$H(f) = e^{j\pi f\,(N-1)}\ \frac{\sin(N\pi f\,)}{\pi f}$$

Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

➢ Illustration

- Cas des sinusoïdes





  - A cause du fenêtrage, le spectre de la sinusoïde apparaît sous forme de plusieurs raies non nulles.

- La troncature d'un signal sinusoïdal a deux conséquences:
  - L'élargissement de la raie principale

    Cela nous limite dans la séparation (la résolution) de raies voisines.
  - L'apparition de raies secondaires qui peuvent cacher des raies principales d'une autre composante du signal.
- Phénomène de fuite spectrale
  - Si nous avions pris une durée infinie du signal, nous n'aurions pas eu cet inconvénient.

Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

➢ Application: analyse spectrale

- Le spectre complexe : $X_N(k) = TFD(x(n))$

- Le spectre d'amplitude : $\left|X(k)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\left[X(k)^2\right] + \mathrm{Im}\left[X(k)^2\right]}$

- Le spectre de phase : $\left|\varphi_X(k)\right| = Arctg\left[-\frac{\mathrm{Im}\left[X(k)\right]}{\mathrm{Re}\left[X(k)\right]}\right]$

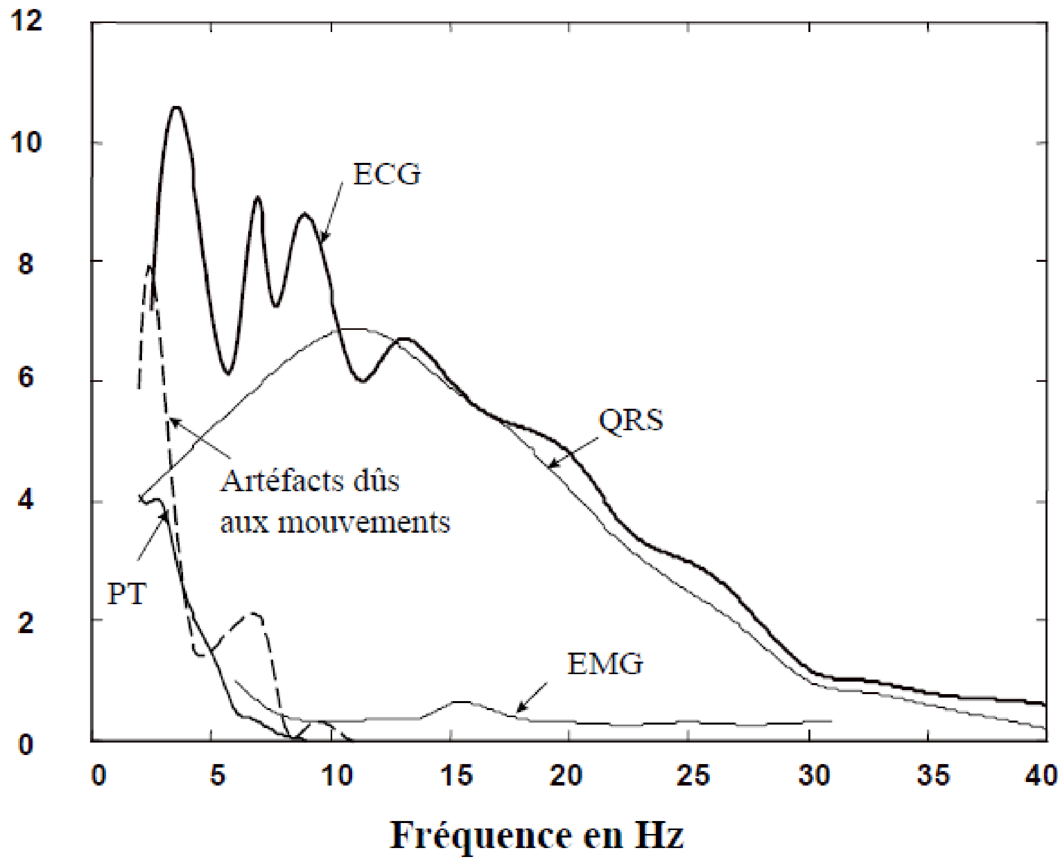
- Puissance : $\left|X(k)\right|^2 = \mathrm{Re}^2\left[X(k)\right] + \mathrm{Im}^2\left[X(k)\right]$

- Densité spectrale de puissance (DSP)
  - la Transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation

$S_x(k) = TFD[\Gamma(\tau)]$ Théo. de *Wiener-Kintchine*

Outils de base :Transformée de Fourier Discrète

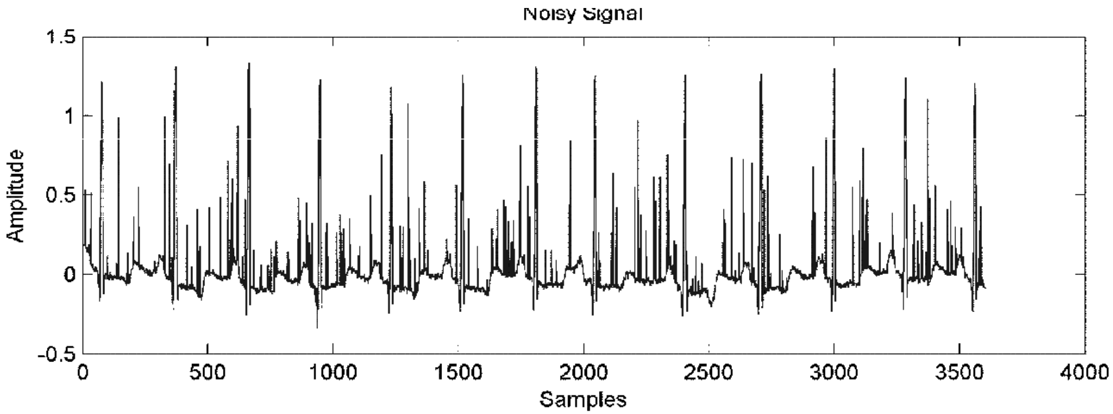
➢Analyser le contenu fréquentiel d'un signal ECG

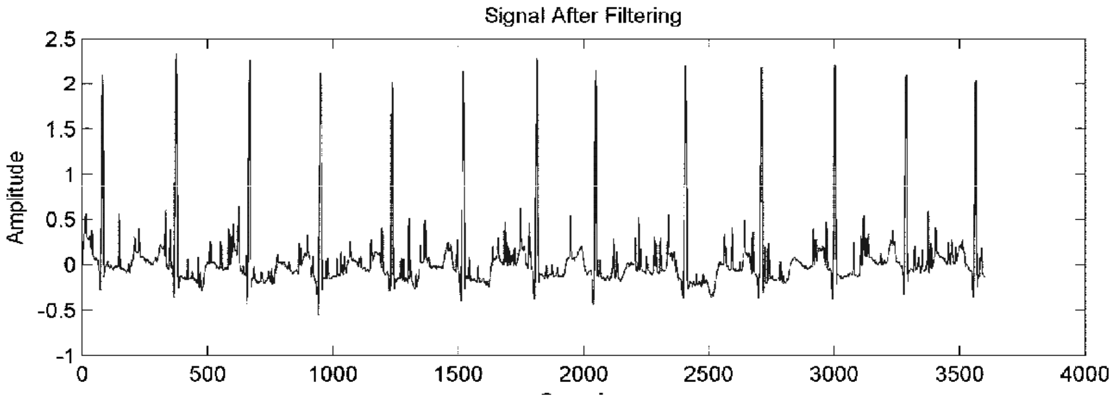


Filtres numériques

➢ Nécessité du filtrage

ECG





Filtres numériques

➢ Réponse impulsionnelle

x(n) → ***filtre h(n)*** → *y(n) = x(n)*h(n)*

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

- Causalité du filtre
  - Le filtre est causal ssi la réponse impulsionnelle est causale: $h(n) = 0 \quad \forall n < 0$
- Stabilité
  - Le filtre est stable ssi la réponse impulsionnelle est absolument sommable: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$
- Longueur de la réponse impulsionnelle
  - Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

    $h(n) \neq 0 \quad \forall n_0 \leq n \leq n_0 + N + 1,$ *N :* longueur de la réponse impulsionnelle

  - Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

    $h(n) \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$

Filtres numériques

- Equation aux différences

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\textit{filtre}} \longrightarrow y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- $N = 0$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

  - Filtre à réponse non récursive
  - Filtre à réponse impulsionnelle fini (RIF)

- $N \geq 1$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

  - Filtre à réponse récursive
  - Filtre à réponse impulsionnelle infini (RII)

Filtres numériques

- Fonction de transfert en z

x(n) → **filtre h(n)** → *y(n) = x(n)*h(n)*

Transformée en Z ↓↑

Y(z) = X(z).H(z)

- H(z)=Y(z)/X(z)

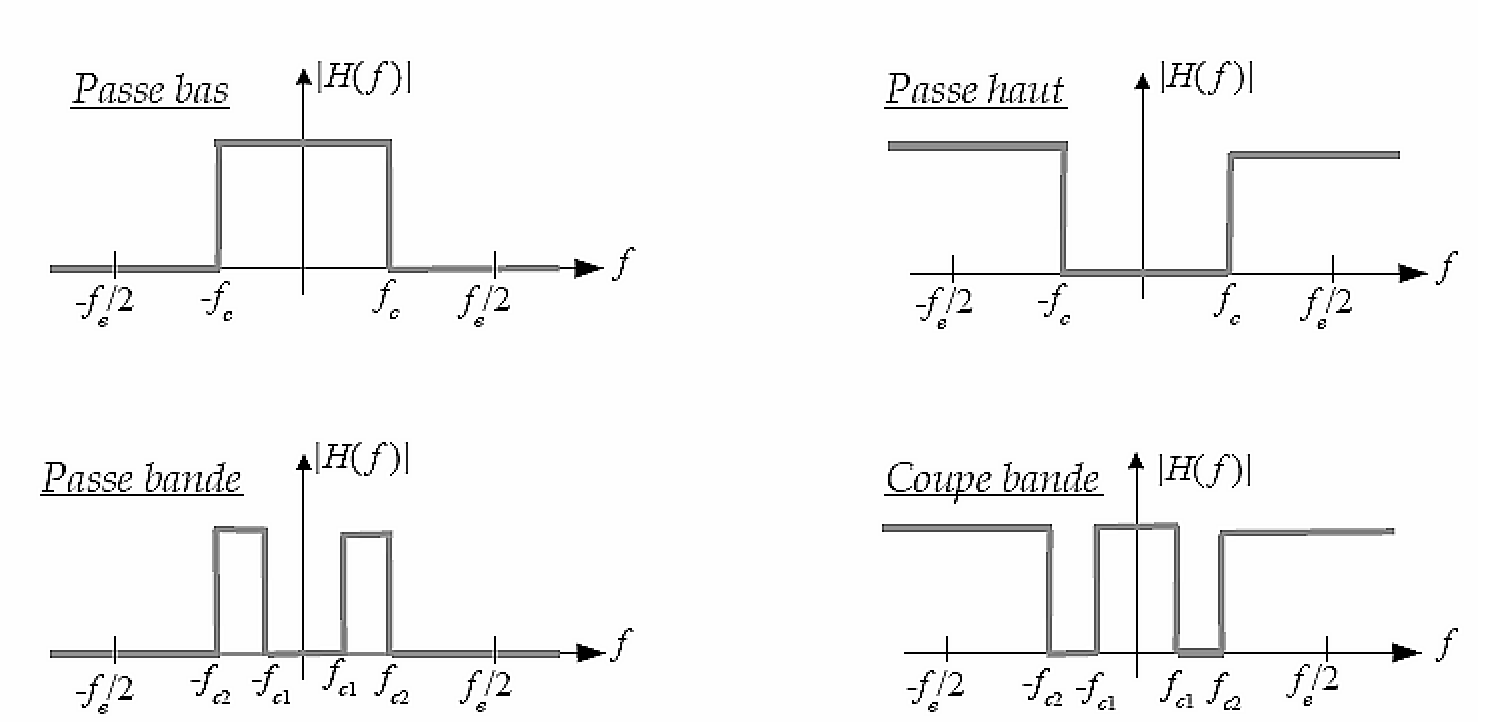
$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r . x(n-r) \xrightarrow{\text{TZ}} H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

Ou bien $$H(z) = b(0) \frac{\prod_{i=1}^{M} (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N} (1 - p_i z^{-1})}$$

➡ H(z) à N pôles p_i et M zéros z_i réels ou en paires complexes conjuguées

Filtres numériques idéaux

- Réponse fréquentielle



Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

- Réponse impulsionnelle

$$h(n) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r \delta(n-r) \qquad \text{ou bien} \qquad h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Equation aux différences
  - La sortie est une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées

$$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r . x(n-r)$$

- Fonction de transfert en *z*

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$$

- Réponse fréquentielle

$$H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-j2\pi fn}$$

Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

➢ Propriétés

- **Stabilité inconditionnelle**
  - Les filtres à réponse impulsionnelle finie sont toujours stables car ils n'admettent pas de pôles.
- **Approximation**
  - Toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre RIF.
- **Phase linéaire**
  - Les filtres FIR peuvent générer des filtres à phase linéaire si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme :

$$H(f) = R(f)e^{-j\varphi(f)} \qquad \varphi(f) = \varphi_0 + 2\pi f\tau \qquad \tau \text{ : constante}$$

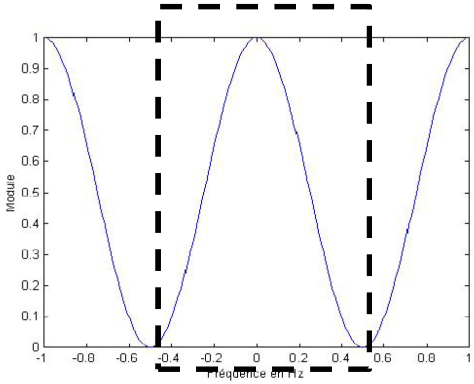
- **Relations**

h(t) réelle, paire	→	*H(f)* réelle, paire
h(t) réelle, impaire	→	*H(f)* imaginaire, paire

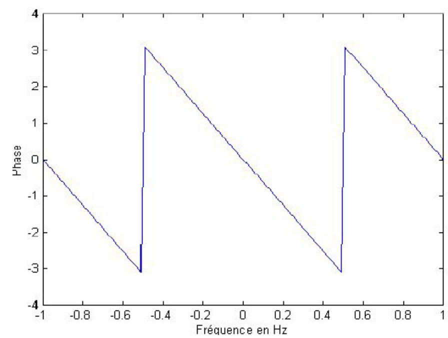
Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

➢ Exemple

$$h(n) = \frac{1}{4}\left(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)\right) \quad \Rightarrow \quad H(f) = e^{-j2\pi f}\cos^2(\pi f)$$



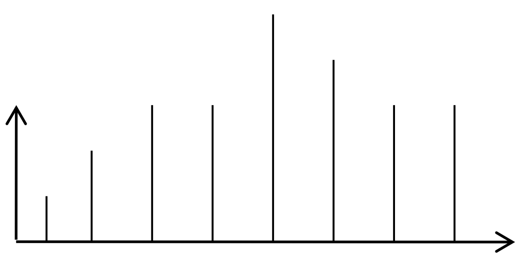
|H(f)|



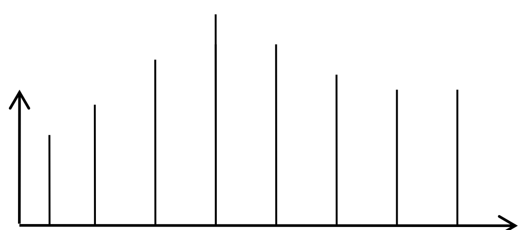
phase

⇒ Filtre passe bas

- Soit un signal [0,1, 2,3,3,5,4,3,3], calculer x(n) * h(n)

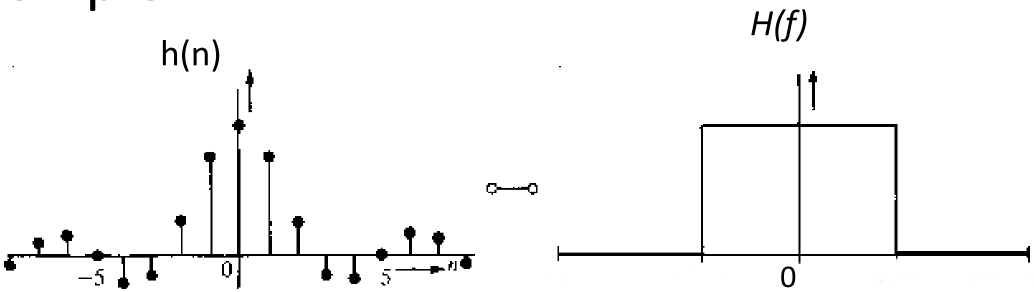


Après le filtrage

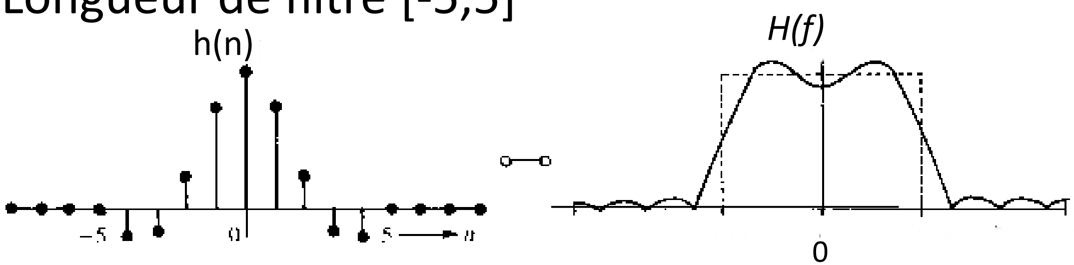


Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

- Exemple



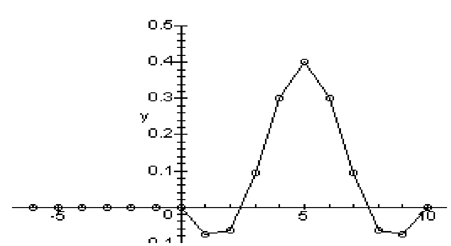
  - Longueur de filtre [-5,5]



    → Problème de fenêtrage

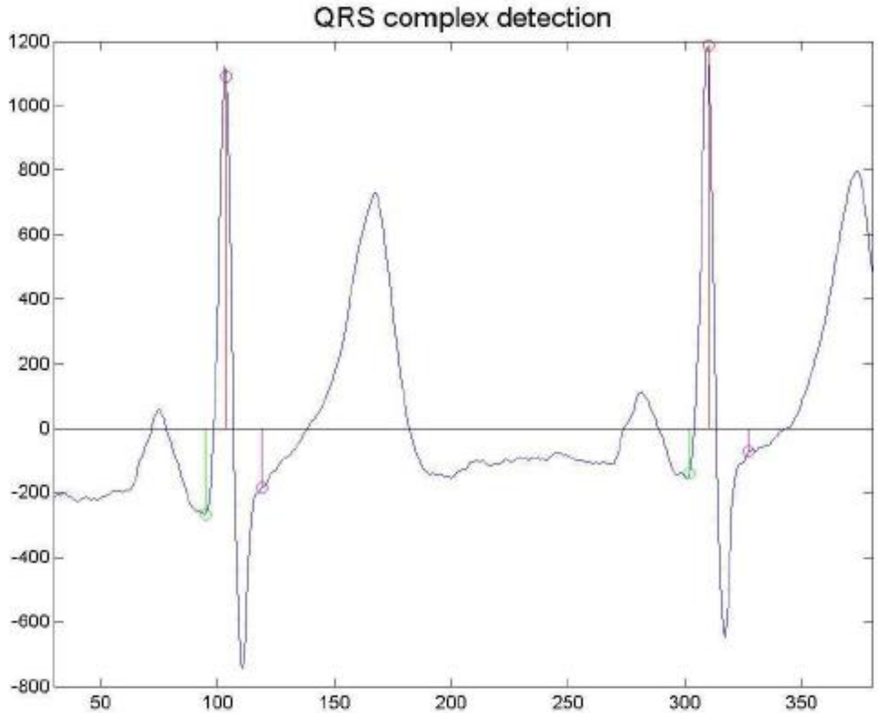
  - Retard temporel pour rendre le filtre causal

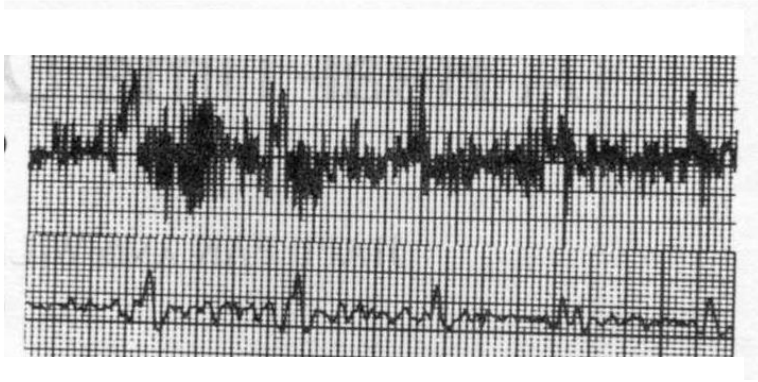
    → Réponse en fréquence inchangée, en module introduction d'un déphasage linéaire en fréquence



Electrocardiogramme (ECG)

➢Exemple

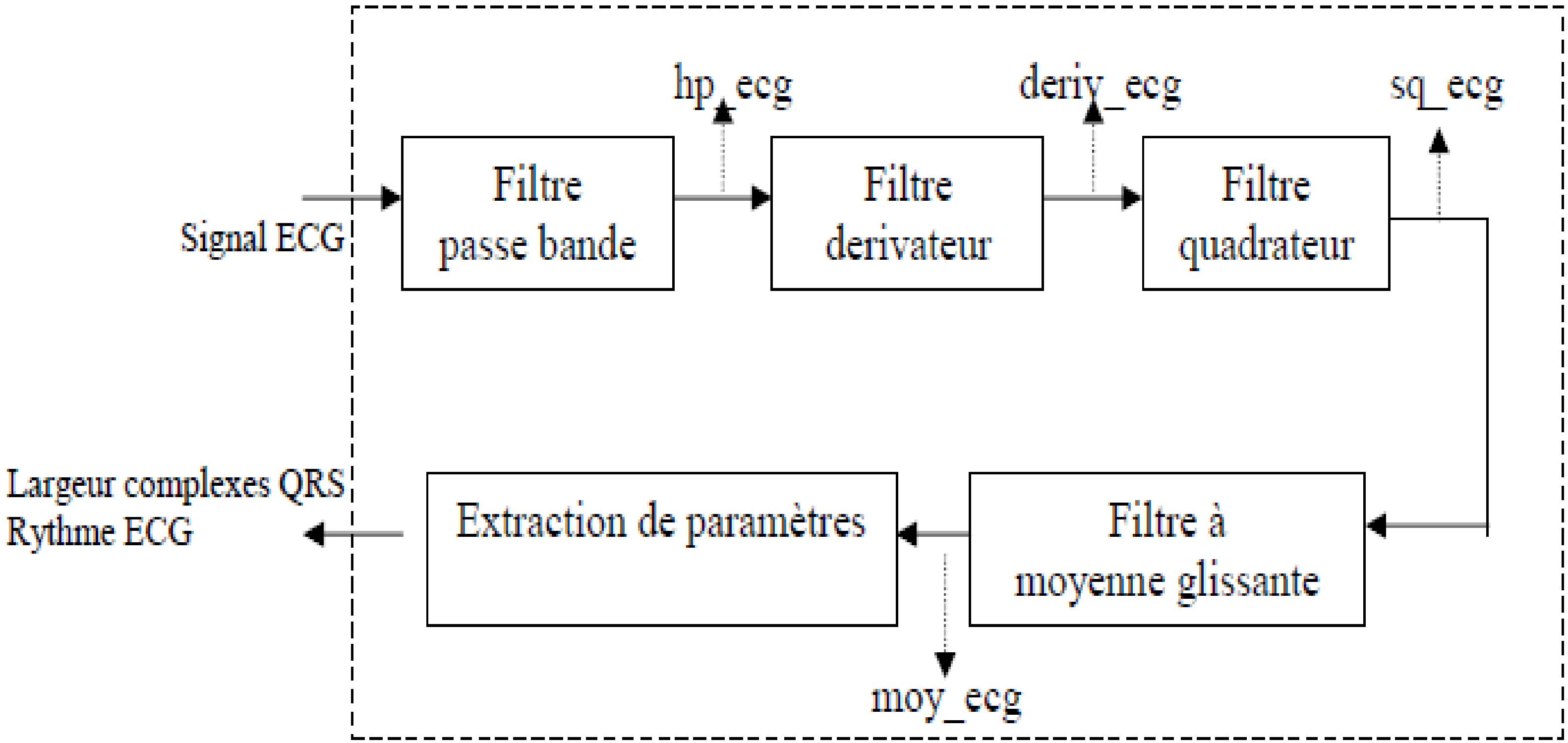




la largeur et le rythme des complexes QRS sont des paramètres importants pour la détection de pathologies.

Electrocardiogramme (ECG)

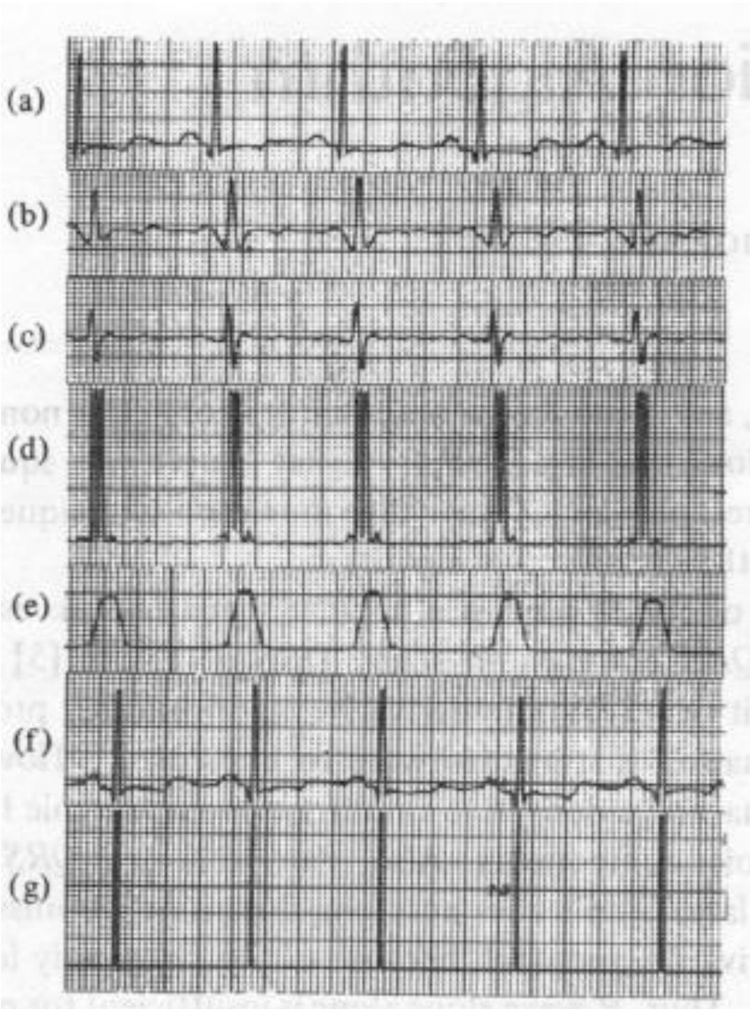
➢ Exemple d'un traitement

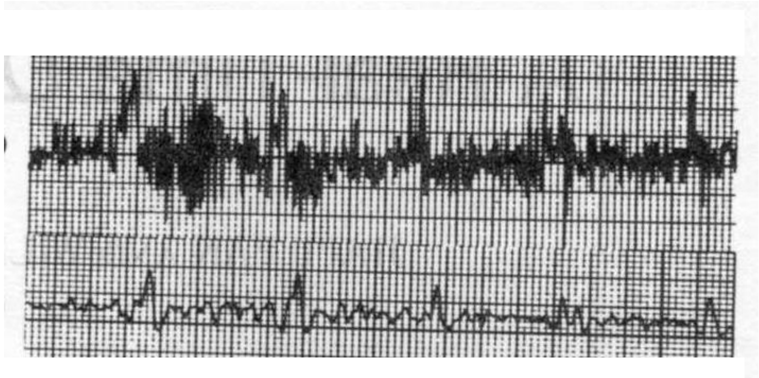


la largeur et le rythme des complexes QRS sont des paramètres importants pour la détection de pathologies.

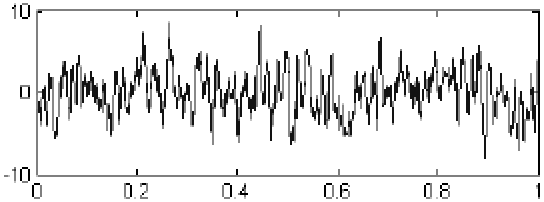
Electrocardiogramme (ECG)

- Exemple d’un traitement





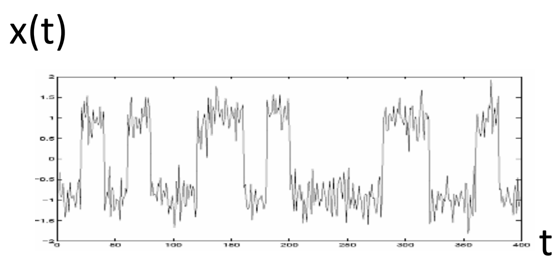
Analyse des signaux aléatoires

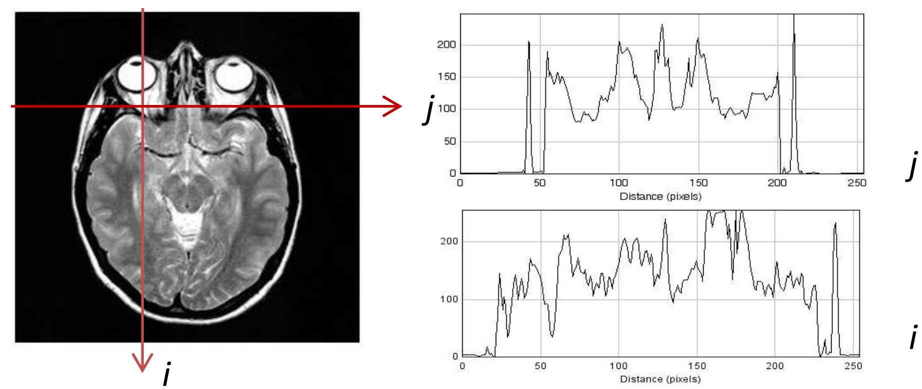


Signaux aléatoires

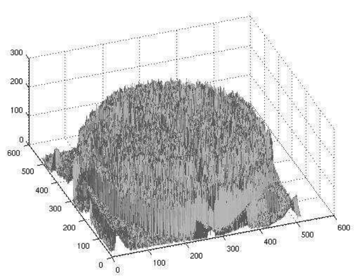
- Signal aléatoire x(t)
  - pour tout t (temps), x(t) est une variable aléatoire.

Signal aléatoire 1D





Signal aléatoire 2D



pour une variable aléatoire $\Rightarrow$ réalisation

pour un signal aléatoire $\Rightarrow$ ensemble

Rappels de probabilités

- Variable aléatoire

  Une variable aléatoire est une grandeur réelle dont la valeur dépend du hasard. Cette dépendance est exprimée par une loi de probabilité appelée distribution.

- Distributions d'une variable aléatoire x :

  - sa fonction de répartition *F(x)* qui exprime la probabilité *P* que la variable aléatoire soit inférieur à une valeur x donnée :

    $F(a) = P(X \leq a)$; $\begin{cases} F(-\infty) = 0 \\ F(+\infty) = 1 \end{cases}$

  - sa densité de probabilité (ddp) *p(x)* qui est par définition, la dérivée de la fonction de répartition :

    $$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

  - relation:

$$P(a \leq x \leq b) = F(a) - F(b) = \int_a^b p(x)dx$$

Rappels de probabilités

➢ Exemple

- Tirer au sort deux pièces (deux faces: T=*Pile*, H=*Face*)
- Définition des attributions numériques:

Events(δ)	Prob.	X(δ)	Y(δ)
HH	1/4	1	-100
HT	1/4	2	-100
TH	1/4	3	-100
TT	1/4	4	500

Fx (2) = Pr{HH,HT} = 1/2
Fy (2) = Pr{HH,HT,TH} = 3/4

Rappels de probabilités

- Probabilités conditionnelles
  - La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisée :

$$P(A/B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

  - La probabilité conjointe de deux événements A et B peut être exprimée à l'aide des probabilités simples et conditionnelles

$$P(A,B) = P(A/B)\,P(B) = P(B/A)\,P(A)$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

  - Si deux événements A et B sont statistiquement indépendants :

$$P(A/B) = P(A) \qquad P(B/A) = P(B).$$

Rappels de probabilités

- Une variable aléatoire est caractérisée par sa densité de probabilité (ddp) dont les caractéristiques les plus utiles en traitement du signal sont les suivantes :

  - L'espérance mathématique de variable aléatoire X
    - C'est la valeur moyenne statistique, c'est à dire la valeur théorique limite atteinte par x lorsque N tend vers l'infini :

$$E(X) = \lim_{N \to \infty} \overline{X}$$

  - La moyenne

dans le cas continu: $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx$

dans le cas discret : $\mu_X = E[X] = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot p(x_i)$

  - La variance

dans le cas continu: $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot p(x) \cdot dx$;

- écart-type: σ

dans le cas discret : $\sigma_X^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu_X)^2 \cdot p(x_i)$

Rappels de probabilités

- Moments

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx$$

- Moments centraux

$$E[(X-\mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^n p_X(x) dx$$

- Si Y= g(X), alors

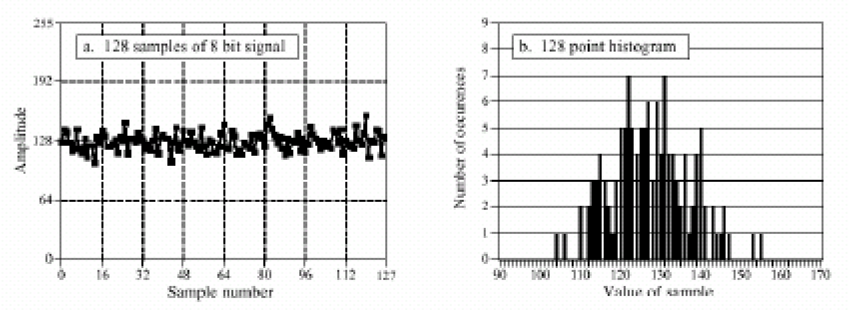
$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_X(x) dx$$

Rappels de probabilités

- Exemple
  - Formule mathématique (ddp)

$$P(x)= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Histogramme et densité de probabilité



Rappels de probabilités

- Indépendance

  - Deux variables aléatoires X et Y sont statistiquement indépendantes si

    $$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \Rightarrow p_{XY}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$$

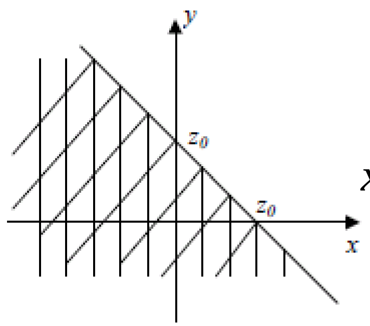
  - Si X et Y sont indépendantes, alors :

    $$z = q(x) \quad \text{et} \quad w = h(y)$$

    sont aussi indépendantes

Rappels de probabilités

- Exemple
  - Soit z=x+y. x et y sont indépendantes avec $p(x,y)=p_x(x)p_y(y)$



$z \le z_0$

$x+y \le z_0$

  - Calculer *p(z)*

$$F_z = \Pr\{z \le z_0\} = \Pr\{(x,y)\in D_z\} = \iint_{D_z} p(x,y)dxdy$$

$$p_z(z) = \frac{\partial F_z(z)}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{z-y} p(z-y,y)dz)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(z-y,y)dy$$

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(z-y)p_y(y)dy = \boxed{p_x(z)*p_y(z)}$$

Rappels de probabilités

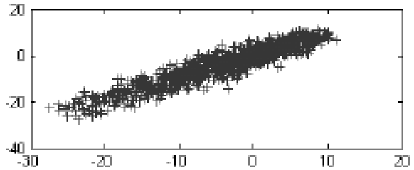
➢ Corrélation statistique

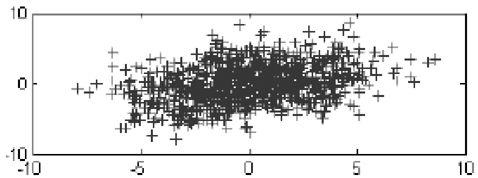
$$R(X,Y) = E(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)dxdy$$

où X,Y : deux variables aléatoires

p(X,Y) : la densité de probabilité conjointe du couple de variables aléatoires.

y





x

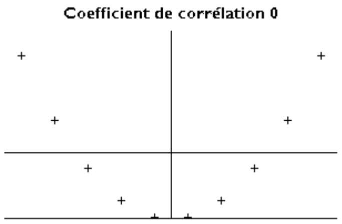
➢ Covariance

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \longrightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Rappels de probabilités

- Coefficient de corrélation

Non linéaire



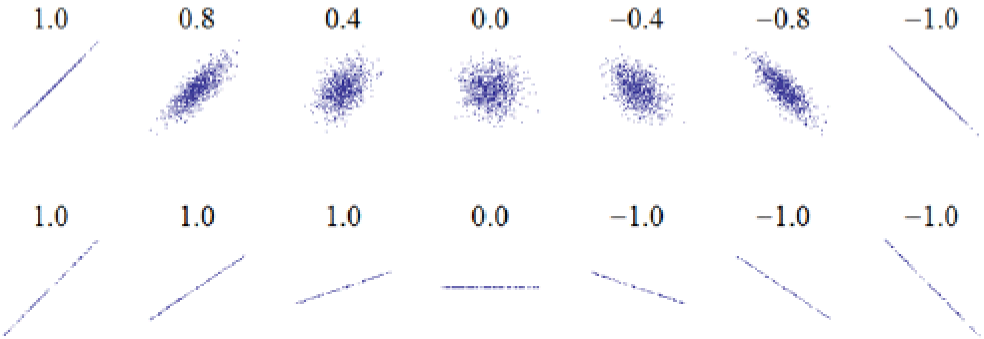
- Mesure de la relation linaire entre deux variables.

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Si les deux variables aléatoires ne sont pas corrélées, alors :

$$E[XY] = E[X]E[Y], \mathrm{cov}(X,Y) = 0, \rho = 0$$

- Indépendance est une condition plus forte que non-corrélation
- Illustration



Exemple (tiré de Ross (2004, p. 306))

- Soit *X* une variable aléatoire discrète telle que :

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{3}$$

- Définissons *Y* en relation avec *X* : $\begin{cases} 0 & \text{si } X \neq 0 \\ 1 & \text{si } X = 0 \end{cases}$

- On calcule : $\mathrm{E}[XY]=\frac{1}{3}(0\cdot 1)+\frac{1}{3}(1\cdot 0)+\frac{1}{3}(-1\cdot 0)=0$

- On voit aussi que : $\mathrm{E}[X]=\frac{1}{3}(0)+\frac{1}{3}(1)+\frac{1}{3}(-1)=0+1-1=0$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)=0-0=0$$

- Mais les deux variables ne sont pas indépendantes!

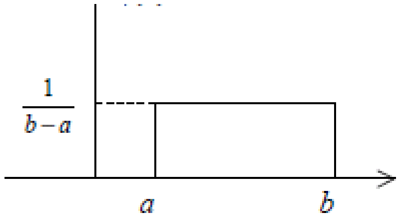
Rappels de probabilités

- Distribution uniforme

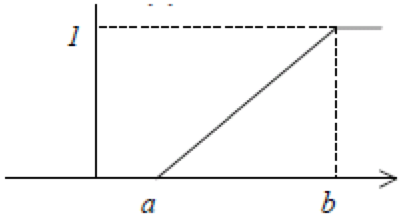
Uniform: $x \sim U(a, b)$, $a < b$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & else \end{cases}$$

p(x)



F(x)

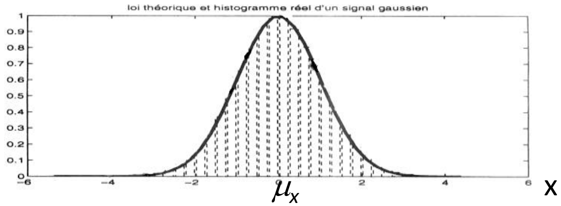


Rappels de probabilités

➢ Distribution normale ou de Gauss

- Formule mathématique (ddp)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}]$$



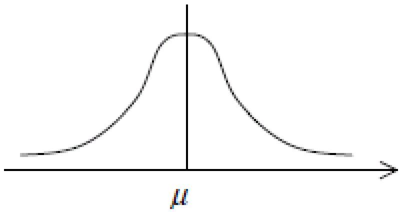
On note aussi: $x \sim N(\mu_x, \sigma_x)$

$P[-\sigma_x < x < \sigma_x] = 0.683$
$P[-2\sigma_x < x < 2\sigma_x] = 0.955$
$P[-3\sigma_x < x < 3\sigma_x] = 0.997$

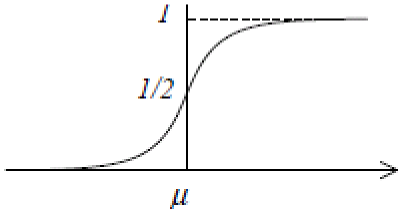
μ_x *: moyenne*

σ_x *: écart-type*

p(x)



F(x)



Rappels de probabilités

➢ Théorème de la limite centrale

- Pour *n* variables aléatoires indépendantes $x_1, \cdots, x_n$ de moyenne μ_x et de variance σ_x^2 alors :

$$y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)}{\sigma_x \sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} y \sim N(0,1)$$

- L'hypothèse gaussienne est valide si le phénomène aléatoire considéré est dû à un effet cumulatif d'un grand nombre de sources indépendantes d'incertitudes dont les effets individuels sont uniformément faibles et négligeables.

Rappels de probabilités

- Distribution de Bernoulli
  - C'est une distribution discrète de probabilité, qui prend la valeur *a* avec la probabilité *p* et *b* avec la probabilité *1-p*. Pour les autres valeurs la probabilité=0.

$$p(x) = p\delta(x-a) + (1-p)\delta(x-b)$$

avec $\mu_x = ap + b(1-p)$

$$\sigma_x^2 = p(1-p)(b-a)^2$$

Rappels de probabilités

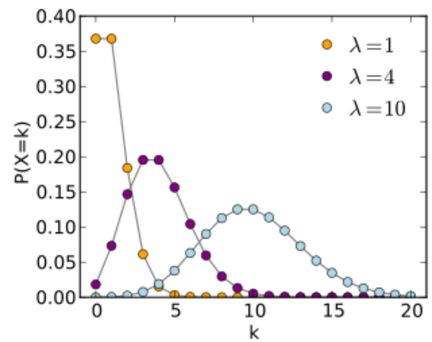
➢ Distribution de Poisson (loi des événements rares)

- La loi de probabilité de Poisson est discrète qui décrit le comportement du nombre d'évènements *x (x = 0, 1, 2, ...)* se produisant dans un laps de temps fixé λ (λ est un nombre réel strictement positif).

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

λ : moyenne

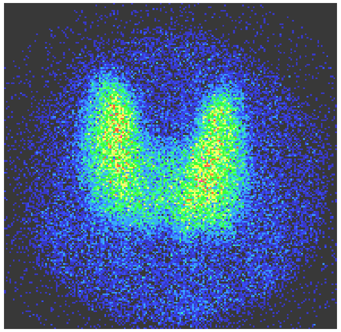
λ: écart-type



Pour les grandes valeurs de λ, cette loi se confond très rapidement avec la gaussienne.

- Applications
  - Imagerie médicale

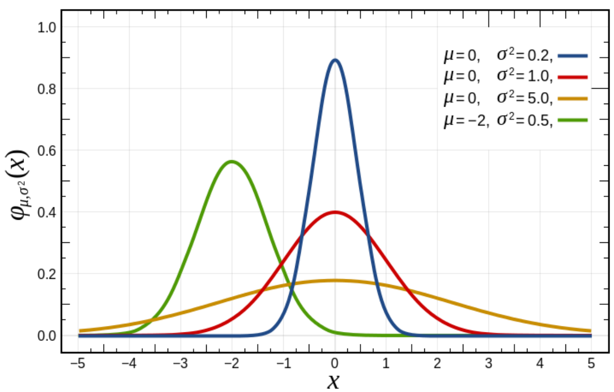
    Dans le cas de rayons *X* ou γ, le nombre de photons émis par seconde est aléatoire et est soumis à une loi de Poisson.



Rappels de probabilités

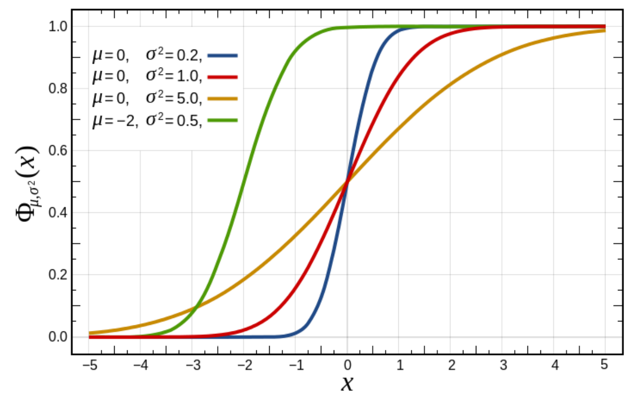
➢ Exemples

p(x)

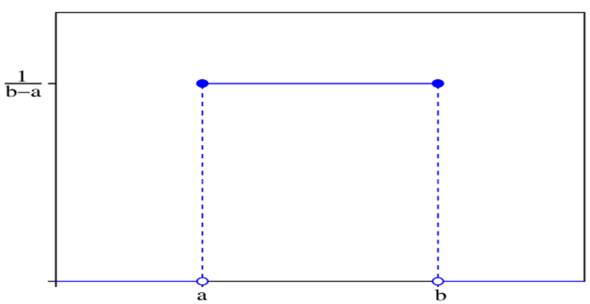


Loi normale

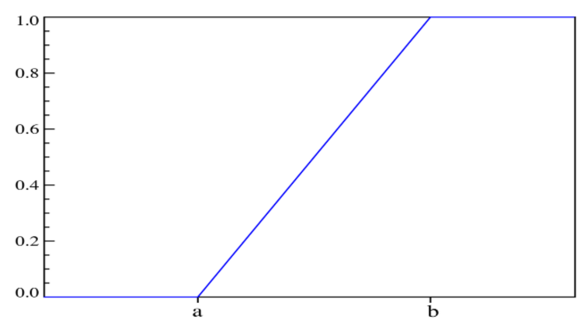
F(x)



Fonction de répartition



Loi uniforme



Fonction de répartition

https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale

Signaux aléatoires

Signaux déterministes

- **Signaux à énergie finie**
- **Signaux à puissance finie**

$\rightarrow$ **Mesure de ressemblance**

Autocorrélation **temporelle**

Processus aléatoires

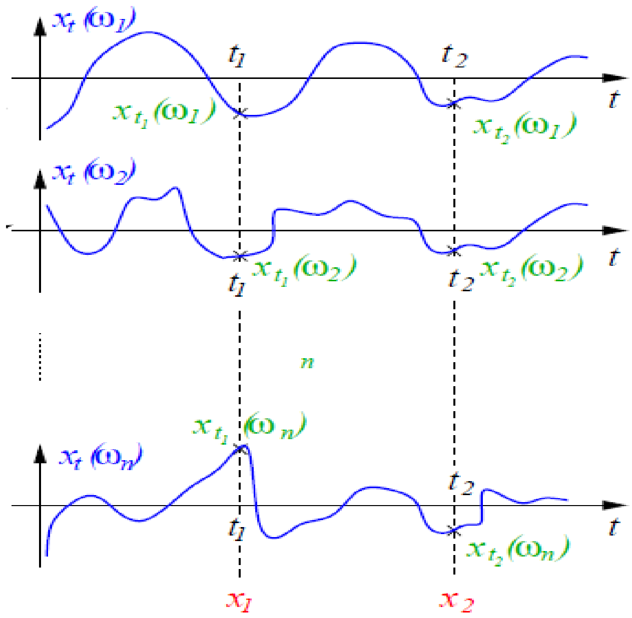
$\rightarrow$ Statistique du **second ordre**

$\rightarrow$ Caractérisation fréquentielle des signaux aléatoires (Densité spectrale)

Autocorrélation **statistique**

Processus aléatoire

- Un processus aléatoire (stochastique) peut être défini comme une famille de fonction à deux variables notée *{x(t,ω)}.*
- Pour chaque t, x(.) est une variable aléatoire égale à l'état du processus considéré à l'instant t.
- Pour *ω fixé,* $x_t()$ est une réalisation du processus qui est une fonction du temps.



Processus aléatoire

- Loi de distribution finie du processus
  - La fonction de répartition conjointe:

$$F_{x(t1)\ldots x(tn)}(a_1,\ldots a_n)$$

  - La fonction densité de probabilité :

$$p_{x(t1)\ldots x(tn)}(a_1,\ldots a_n)$$

  - *Le processus stochastique peut être caractérisé par la définition de la loi de distribution finie pour tous les ensembles finis {ti} ∈ T,*

- Processus du second ordre
  - Densité du premier ordre : $p_{x(t)}(\alpha\ ) = p(\alpha, t)$
  - Densité du seconde ordre : $p_{x(t)x(\tau)}(\alpha,\beta) = p(\alpha,\beta,t,\tau)$
  - *Un processus stochastique caractérisé entièrement par ses lois de distributions au premier et deuxième ordre .*

Processus aléatoire

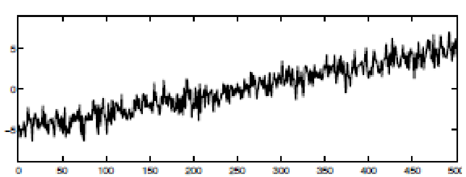
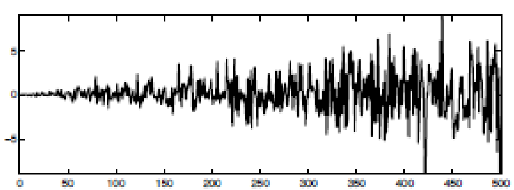
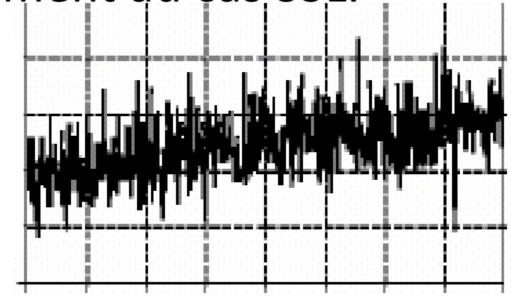
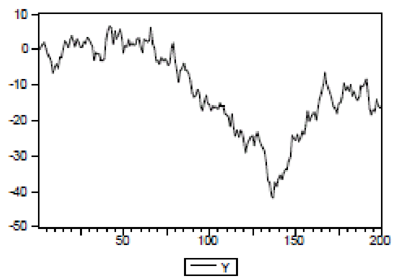
- Propriétés statistiques d'un signal aléatoire
  - La moyenne : $\mu(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha p(\alpha, t) d\alpha$
  - La fonction de corrélation : $R(x; t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$
  - La fonction de covariance : $Cov(x; t_1, t_2) = E[(x(t_1) - \mu_{t1})(x(t_2) - \mu_{t2})]$
- Exemple
  - Soit le processus stochastique : $x(t) = a + bt$

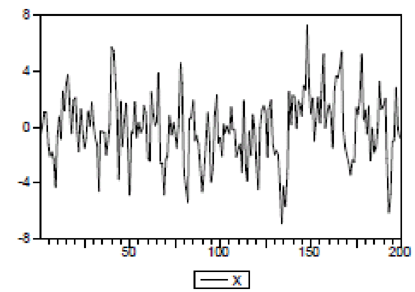
    où a est une v.a. $\sim N(\mu_a, \sigma_a^2)$ et *b* est une v.a. $\sim N(\mu_b, \sigma_b^2)$. *a et b ne sont pas corrélés.*
  - Calculer $\mu_x(t)$, $R(x; t, \tau)$, $Cov(x; t, \tau)$.

Processus aléatoire

➢ Stationnarité

- Un processus est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps.
- *x(t)* est dit Stationnaire au Sens Large (SSL) si
  - $E(x(t)) = \mu$ est indépendant de t.
  - $E(x(t+\tau)x(t)) = R(\tau)$ est indépendant de t.
  - $E[(x(t+\tau)-\mu_{t+\tau})(x(t)-\mu_t)] = Cov(\tau)$ est indépendant de t.
- Dans un contexte applicatif, on se limite généralement au cas SSL.

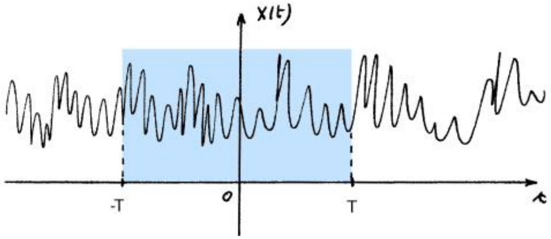







Processus aléatoire

- Moyennes temporelles du processus stationnaire
  - La moyenne temporelle d'un échantillon du processus stochastique:

$$\bar{x} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)dt$$



  - La moyenne temporelle de l'auto-corrélation:

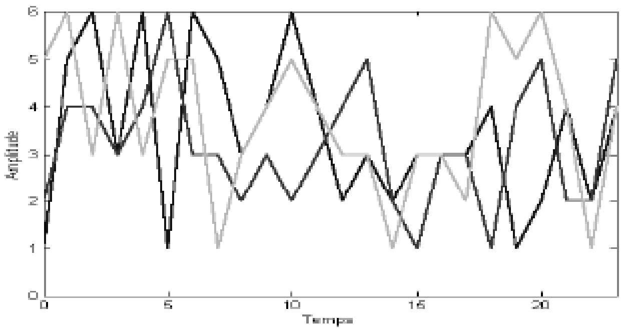
$$\bar{R}_x(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau)dt$$

  - Ces deux moyennes sont aussi des variables aléatoires.
  - Si le processus est stationnaire et les moyennes statistiques et temporelles coïncident, le processus est dit ergodique.

* Lorsque l'on dispose de peu de réalisations (une seule parfois) on utilise la propriété d'ergodicité pour remplacer moyennes statistiques par des moyennes temporelles

Processus aléatoire

- Ergodicité
  - Dans la pratique, on ne dispose souvent que d'une réalisation du phénomène aléatoire. Il devient donc difficile de caractériser statistiquement le signal aléatoire.



  - Un processus stochastique x(t) est ergodique si toutes les moyennes temporelles existent et ont même valeur pour tout échantillon.
  - Un processus SSL est dit à moyenne ergodique si $E[\bar{x}] = \mu_x$
  - Un processus SSL est dit à auto-corrélation ergodique *(d'ordre 2)* si

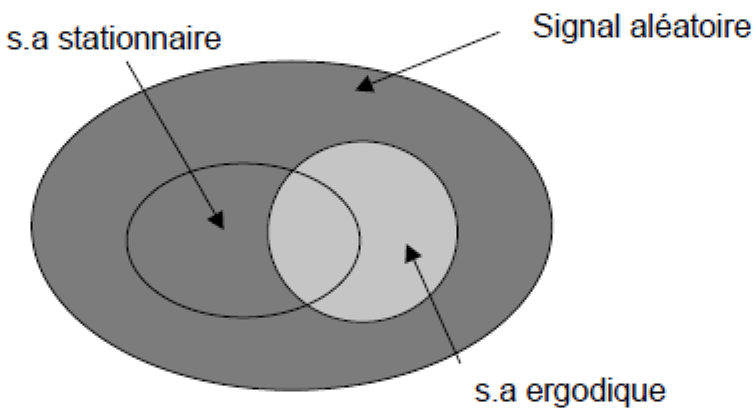
$$E[\overline{R}_X(\tau)] = R_X(\tau)$$

  - La puissance moyenne d'un processus stochastique x(t) SSL est définie par : $p = E[x(t)'x(t)]$

$$\boxed{\textbf{Moments statistisques} = \textbf{Moments temporels}}$$

Processus aléatoire

- Stationnarité vs Ergodicité
  - Stationnarité n'implique pas ergodicité.
  - Ergodicité n'implique pas stationnarité.
  - L'ergodicité simplifie l'analyse de signaux aléatoires.



- **Signaux stationnaires ergodiques**

  Estimation des paramètres statistiques à partir des paramètres temporels

Processus aléatoire

- Exemple
  - Soit le processus $x(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$

    où a, b sont des variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance unité.
  - Calculer $\mu_x(t)$, $R(x; t+\tau, t)$), $Cov(x; t+\tau, t)$.

Estimation de la moyenne et des covariances

- Estimation de la moyenne

  Soit {Xt} un processus aléatoire à temps discret stationnaire au second ordre. On suppose avoir observé n échantillons consécutifs X1,…Xn du processus.

  - Moyenne empirique

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$$

Où n est le nombre d'observations

Estimation de la moyenne et des covariances

- Estimation des coefficients d'autocovariance et d'auto corrélation
  - Covariance empirique

$$\hat{\gamma}_n(h) = \begin{cases} n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (X_{t+|h|} - \hat{\mu}_n)(X_t - \hat{\mu}_n) & \text{si } |h| \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{\Gamma}_n = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_n(0) & \hat{\gamma}_n(1) & \cdots & \hat{\gamma}_n(p-1) \\ \hat{\gamma}_n(1) & \hat{\gamma}_n(0) & \cdots & \hat{\gamma}_n(p-2) \\ \vdots & & & \\ \hat{\gamma}_n(p-1) & \hat{\gamma}_n(p-2) & \cdots & \hat{\gamma}_n(0) \end{bmatrix}$$

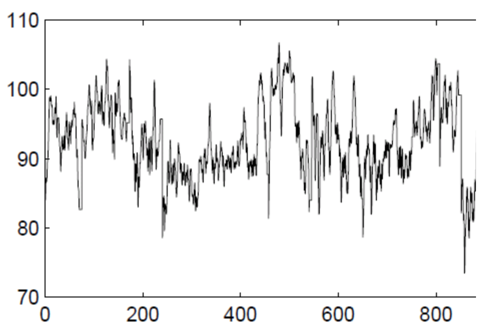
Estimation de la moyenne et des covariances

- Exemple
  - Soit x(n)=w1x(n-1)+vn(n). En disposant **n** observations, estimer le paramètre w1.

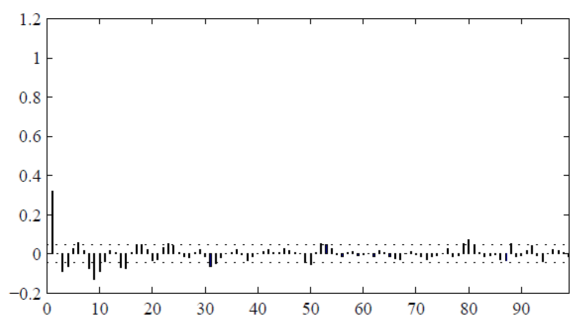
    E[x(n)x(n-1)]= E[w1x(n-1)x(n-1)]+E[x(n-1)vn(n)]

    R(1)=w1R(0)

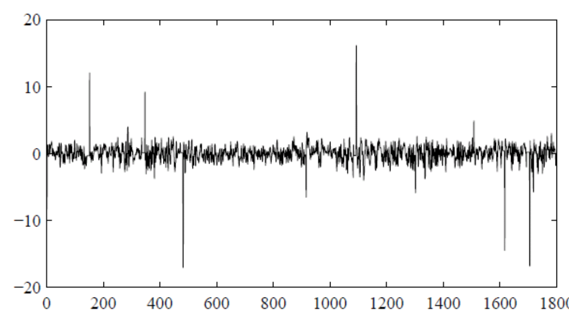
    w1= R(1)/R(0)



signal



autocorrélation



erreur

Rapport signal sur bruit

➢ Définition

- Soit un signal observé est : *y(n)=x(n)+b(n)*, où x(n) le signal avec $S_0 = E[x(n)^2]$ et b(n) le bruit additif.
- Si le signal est déterministe, $S_0(n) = x(n)^2$
- Hypothèses sur le bruit
  - Le bruit est un brut gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 .
  - Le bruit est non corrélé avec x(n)
- Le rapport signal sur bruit

$$(\frac{signal}{bruit}) = \frac{S_0}{B_0} = \frac{E[X(n)^2]}{E[b(n)^2]} = S_0/\sigma^2$$

Filtre linaire invariant dans le temps

- Moyenne du signal de sortie

X(t) : un processus aléatoire $\longrightarrow$ $\boxed{\text{filtre } h(t)}$ $\longrightarrow$ $Y(t) = X(t) * h(t)$

$$\mu_Y(t) = E[Y(t)] = E[X(t) * h(t)] = h(t) * E[X(t)] = h(t) * \mu_X(t)$$

TF[h(t)]=H(f)

* Si X(t) est stationnaire au sens large, alors $E[Y(t)] = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = \mu_x H(0)$

- Auto-corrélation

$$R_{YY}(t_1, t_2) = E[Y(t_1) Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_{XX}(t_2 - t_1 + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

* Si X(t) est stationnaire au sens large, alors :

$$R_{YY}(\tau) = E[Y(t_1 + \tau) Y(t_2)] = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_{XX}(\tau) \quad \Rightarrow \quad S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f)$$

* Si X(t) est stationnaire au sens large, alors la sortie Y(t) aussi.

Processus aléatoire

- Soit deux processus aléatoires *x(t)* et *y(t)* stationnaires
  - Fonction d'inter-corrélation

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] \xrightarrow{\text{Non stationnaire}} R_{xy}(t_1,t_2) = E[x(t_1)y(t_2)]$$

  - Fonction d'inter-covariance

$$Cov_{xy}(\tau) = E[(x(t)-\mu_x)(y(t+\tau)-\mu_y)]$$

  - Coefficient d'inter-corrélation

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{Cov_{XY}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad \left|\rho_{xy}\right| \leq 1$$

ρ_{xy} =0 : les variables sont entièrement indépendantes de manière linaire.

ρ_{xy} =1: les variables sont entièrement dépendantes.

Processus aléatoire

➢ Indépendance

*x(t), y(t) sont dits **indépendants** si {x(t1), x(t2), · · · , x(tl)} et {y(t1), y(t2), · · · , y(tm)} sont des ensembles indépendants de vecteurs aléatoires pour tous les t1, t2, · · · , tl; t1, · · · , tm et pour tout m et l.*

➢ Décorrélation

*x(t), y(t) sont dits **décorrélés (non –corrélation)** si x(t1) et y(t2) sont des vecteurs aléatoires décorrélés pour tous les t1, t2.*

- Orthogonalité : Rxy(t1, t2) = 0 ∀ t1, t2

- Décorrélé: Cov xy(t1, t2) = 0 ∀ t1, t2

Densité Spectrale de Puissance

- Un signal aléatoire ne possède pas de transformée de Fourier. Cependant, on peut lui associer une notion de densité spectrale de puissance.

- La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire s'obtient comme la Transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation (Thèoreme de Wiener-Kintchine):

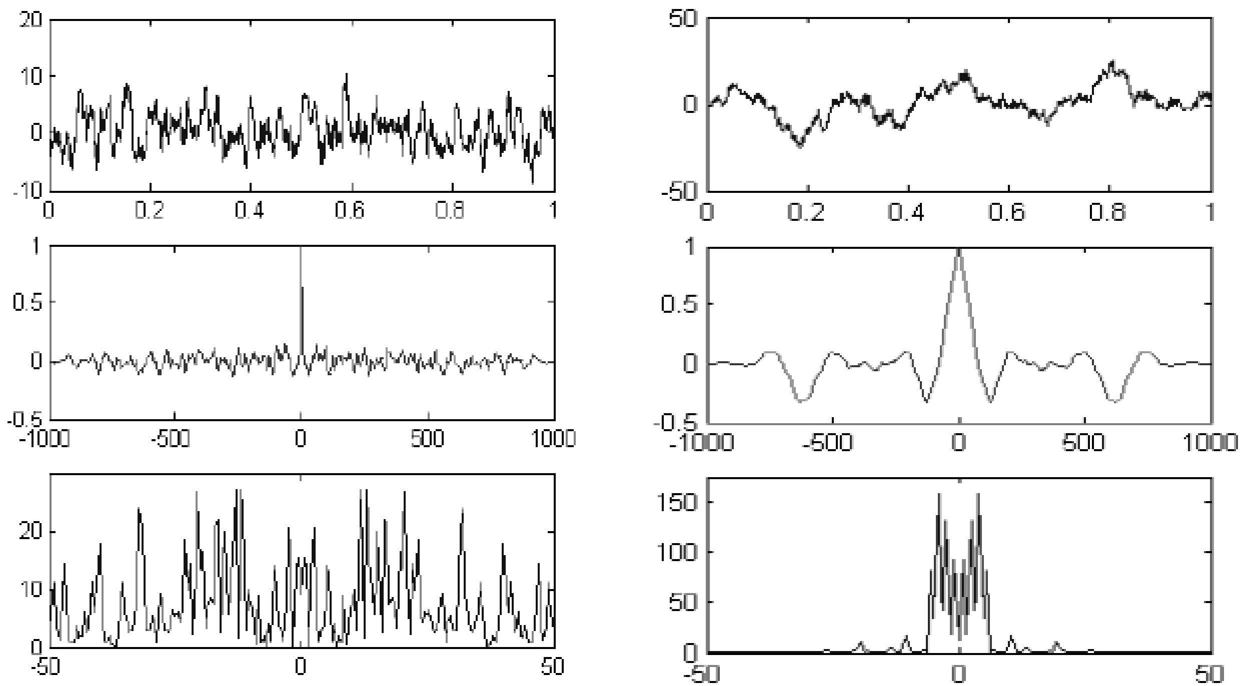
$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

- La densité spectrale de puissance représente la répartition harmonique de la puissance moyenne de *x(t).*

Densité Spectrale de Puissance

- Exemples

Signal 1 — Signal 2



Auto-corrélation

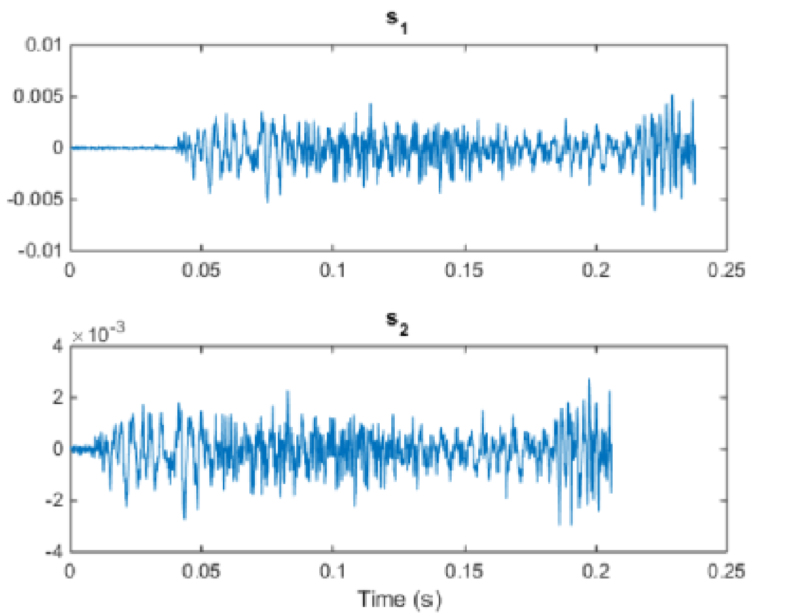
Densité spectrale de puissance

Densité Spectrale de Puissance

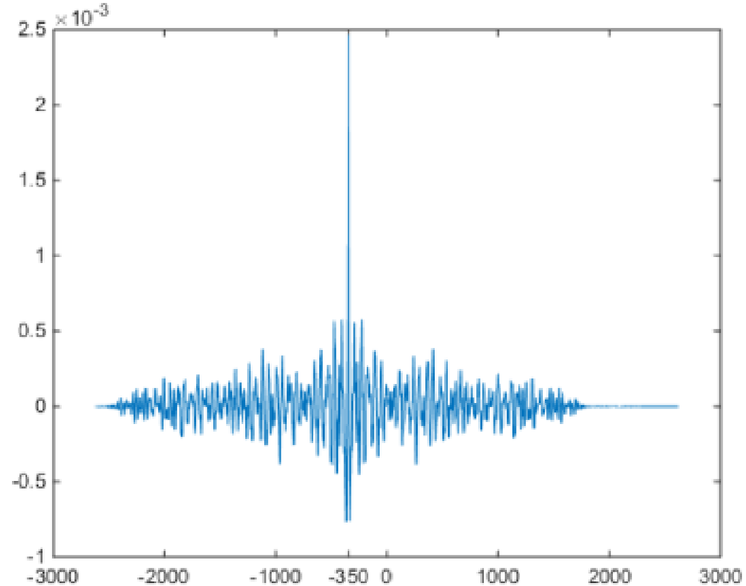
- Exemples

s1

s2

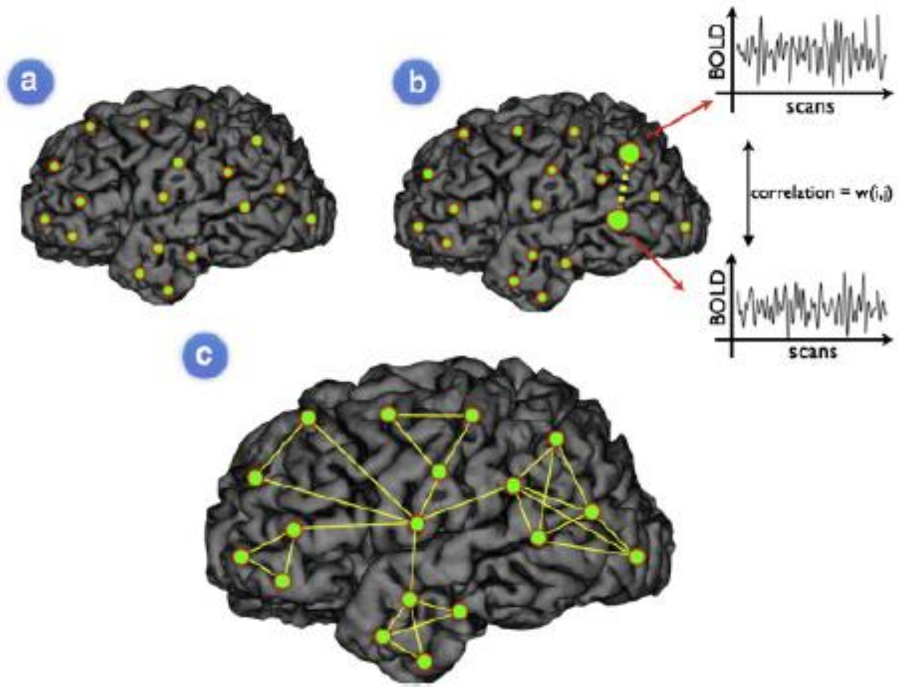


Inter-corrélation



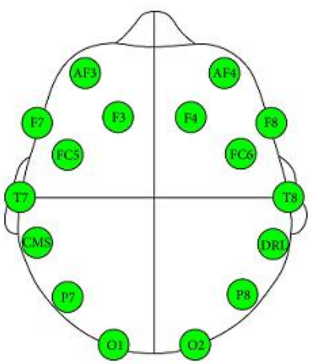
Densité Spectrale de Puissance

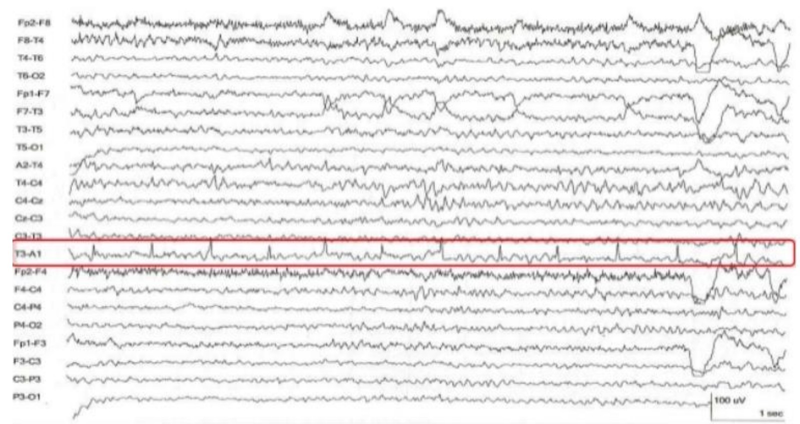
- Exemples



Densité Spectrale de Puissance

- Exemples
  - Reconnaissance des niveaux d'anxiété basée sur l'EEG à l'aide d'une stimulation psychologique

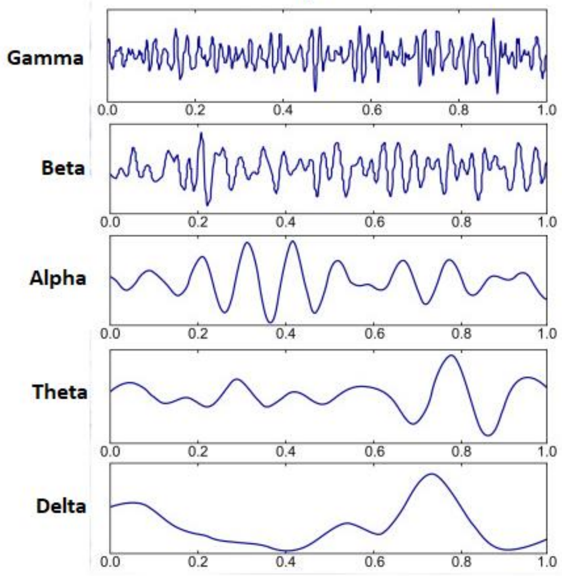




l'oscillation typique du mouvement rythmique des électrodes

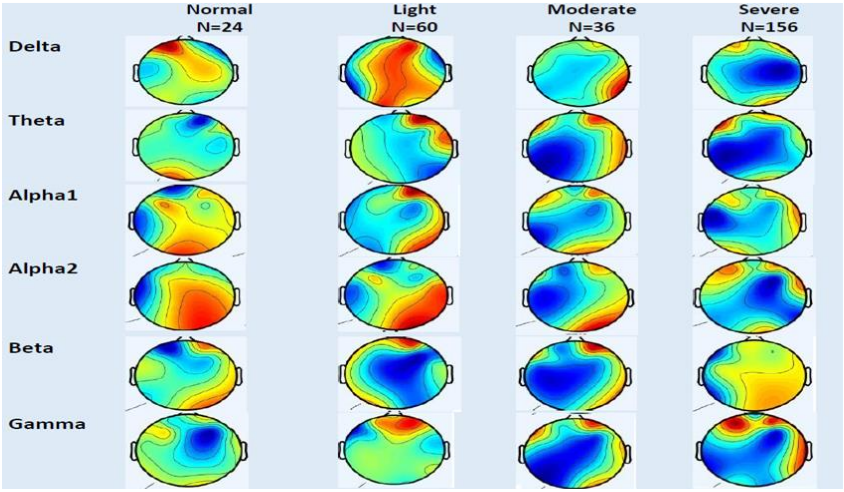
Densité Spectrale de Puissance

- Exemples
  - Reconnaissance des niveaux d'anxiété basée sur l'EEG à l'aide d'une stimulation psychologique



Rythmes EEG (Gamma, Beta, Alpha, Theta, Delta)

Delta (0 - 4 Hz), Theta (4 - 8 Hz), Alpha (8 - 16 Hz), Beta (16 - 32 Hz) and Gamma waves (>32 Hz).

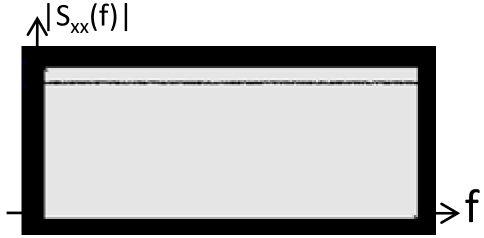


Distribution de la puissance moyenne par bande de fréquence

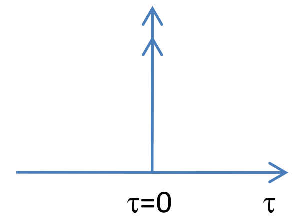
Bruit blanc

- On appelle "bruit blanc" un processus aléatoire centré, stationnaire d'ordre 2, dont la DSP est constante en fréquence.

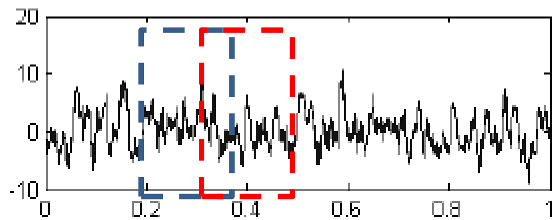
$$S_{xx}(f) = \frac{N_0}{2}$$



$$R(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$



- Interprétation : toutes les valeurs à un temps t sont indépendantes.



- Bruit blanc gaussien
  - Un processus $\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$

Système linaire invariant dans le temps

- Inter-corrélation entre le signal d'entrée et le signal de sortie

$$R_{YX}(t_1,t_2)=E[Y(t_1)X(t_2)] \quad \Rightarrow \quad S_{YX}(f)=H(f)S_{XX}(f)$$

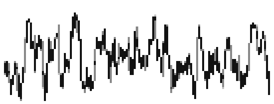
* Si X(t) est stationnaire au sens large, alors $R_{YX}(\tau)=E[Y(t_1+\tau)X(t_1)]=h(\tau)*R_{XX}(\tau)$

- Si le signal d'entrée est un bruit blanc, l'inter-corrélation devient

$$R_{YX}(\tau)=\left[h(\tau)*\delta(\tau)\right]\sigma_n^2$$

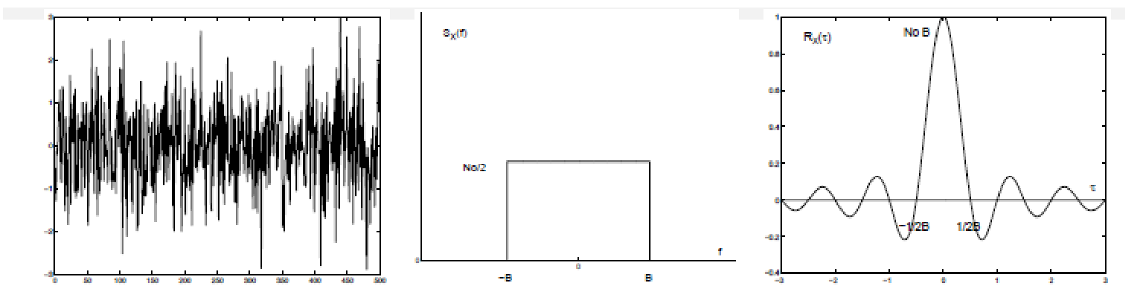
$$R_{YY}(\tau)=E[Y(t_1+\tau)Y(t_2)]=h(\tau)*h^*(-\tau)*R_{XX}(\tau)$$

Bruit blanc:



$$R_{XX}(\tau)=\sigma_n^2\ \delta(\tau)$$

$$S_{xx}(f)=\frac{N_0}{2}$$



Le bruit blanc continu n'a pas de réalité physique. Un bruit physique pourra être considéré comme étant un bruit « blanc » si sa d.s.p. est constante dans une bande de fréquence suffisamment large pour couvrir a bande passante du système de traitement du signal. Un tel bruit est forcément corrélé.

Système linaire invariant dans le temps

- Inter-corrélation entre le signal d'entrée et le signal de sortie

$$R_{YX}(t_1,t_2)=E[Y(t_1)X(t_2)] \quad \Rightarrow \quad S_{YX}(f)=H(f)S_{XX}(f)$$

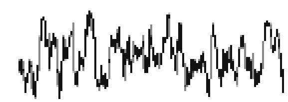
* Si X(t) est stationnaire au sens large, alors $R_{YX}(\tau)=E[Y(t_1+\tau)X(t_1)]=h(\tau)*R_{XX}(\tau)$

- Si le signal d'entrée est un bruit blanc, l'inter-corrélation devient

$$R_{YX}(\tau)=\left[h(\tau)*\delta(\tau)\right]\sigma_n^2$$

$$R_{YY}(\tau)=E[Y(t_1+\tau)Y(t_2)]=h(\tau)*h^*(-\tau)*R_{XX}(\tau)$$

Bruit blanc:

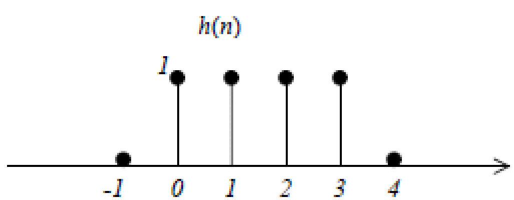


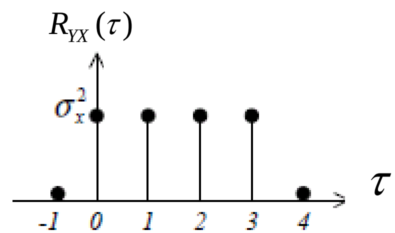
$R_{XX}(\tau)=\sigma_n^2\ \delta(\tau)$

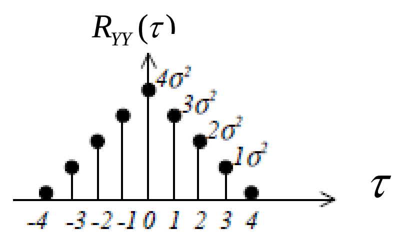
$$S_{xx}(f)=\frac{N_0}{2}$$

- Exemple

x(n): bruit blanc





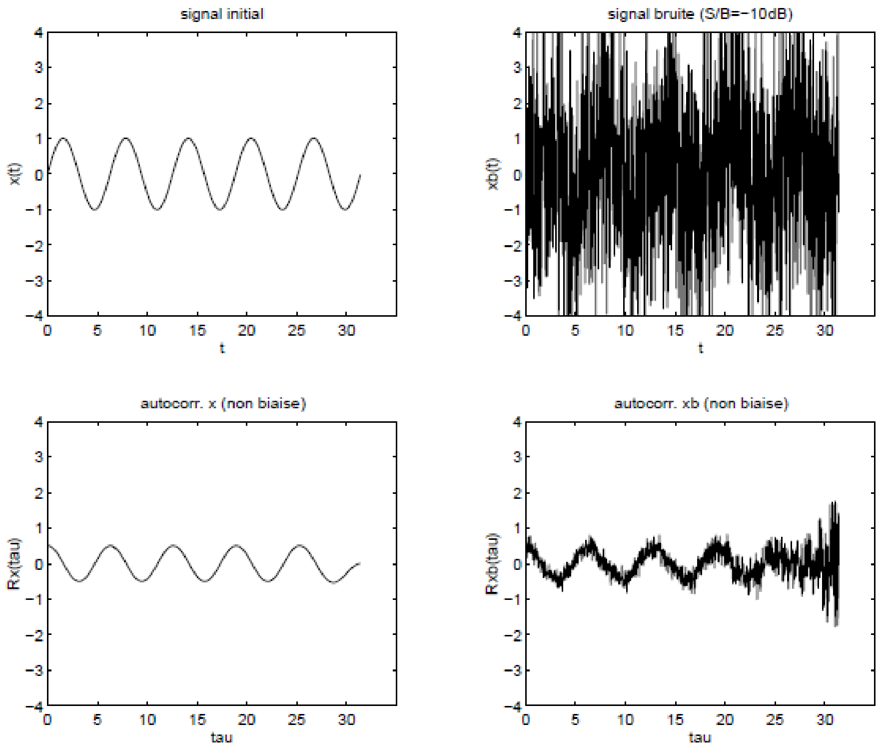


Détection des signaux

- Détection d'un signal périodique bruité par autocorrélation

Signal d'origine

Signal bruité



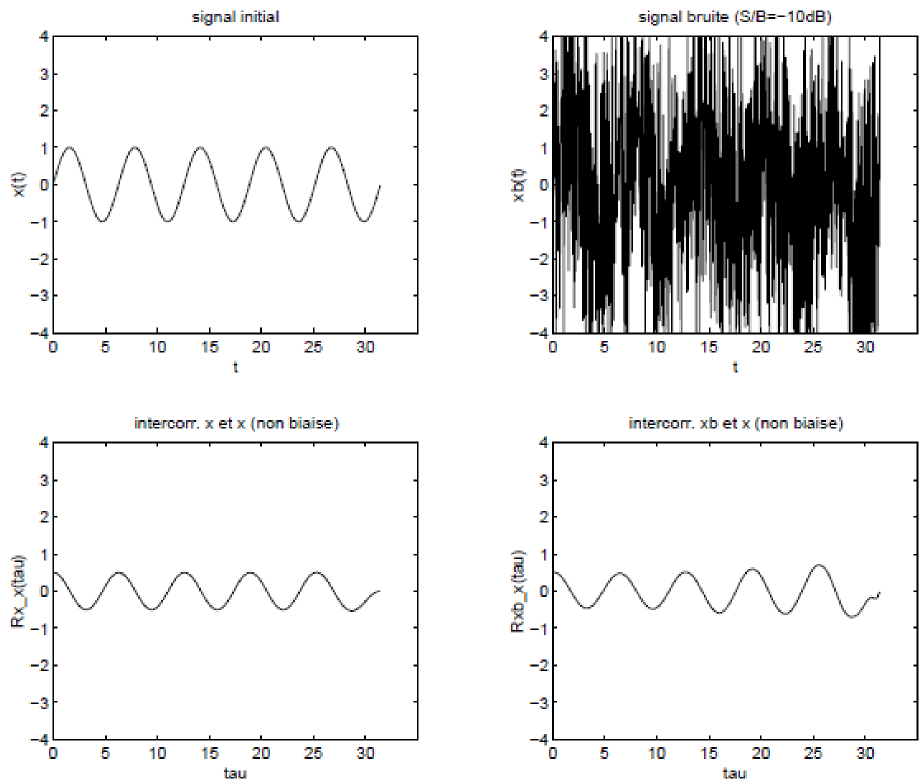
Détection des signaux

➢ Détection d'un signal périodique bruité par inter-corrélation

Signal d'origine

Signal bruité

Signal de référence



Ce cas est plus favorable car on dispose d'une information supplémentaire. La technique décrite permet une bonne détection, avec des niveaux de bruit plus élevés que dans le cas précédent.

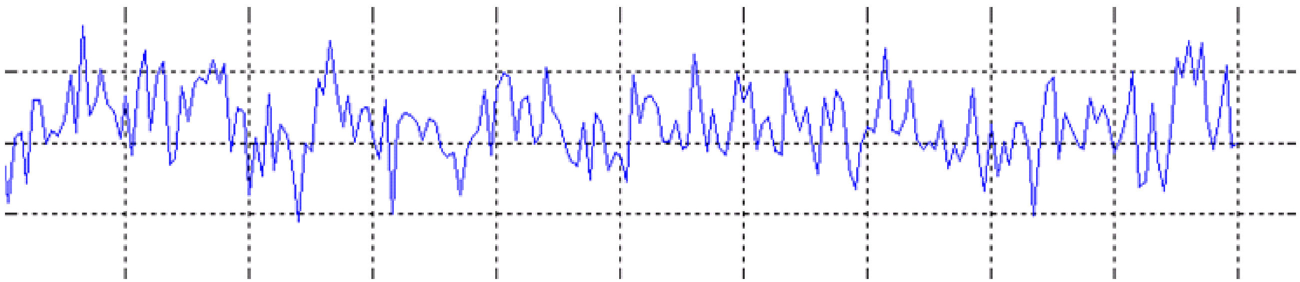
Détection des signaux

- Détection d'un signal binaire et teste des hypothèses

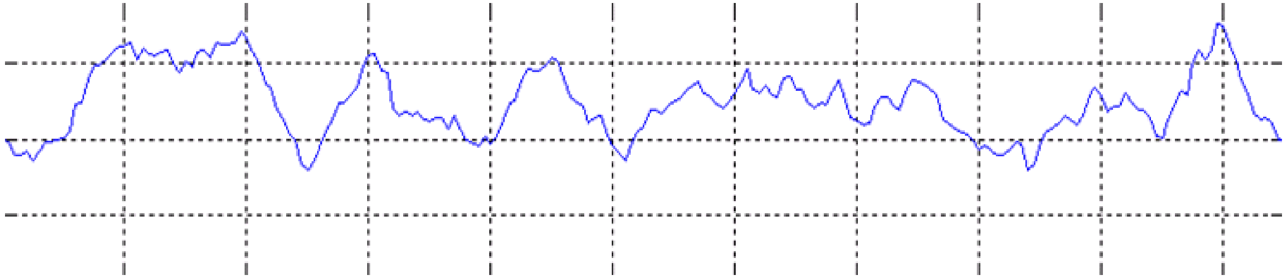
  H0: signal est absent

  H1: signal est présent

Exemple: $y(n)=s(n)+b(n)$



Signal observé



Signal filtré

Test du rapport de vraisemblance

- **Définition**
  - Soit $p(x/H_i)$ représentant la densité de probabilité conditionnelle comme la vraisemblance de H_i. Le rapport de vraisemblance est défini par:

$$\frac{p(x/H_1)P(H_1)}{p(x/H_0)P(H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

- **Maximum de vraisemblance**
  - Minimiser la probabilité de l'erreur $P(H1/H0)P(H0) = P(H0/H1)P(H1)$

$$\frac{p(x/H_1)}{p(x/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Test du rapport de vraisemblance

- En cas d'un bruit gaussien
  - Soit $y = s_i + b_0, \ \mathrm{i} = 1,2$ où S_i est un signal et b_0 est un bruit blanc gaussien ~ $N(0, \sigma^2)$. On utilise le rapporte de vraisemblance pour détecter a1 ou a2 dans le cas de P(a1)= P(a2).
  - Démontrer le seuil optimal $\lambda 0$ = (a1 + a2)/2 pour y:

Détection optimale

- Les deux types d'erreurs possible
  - Erreur de première espèce α
    - La probabilité de choisir H1 alors que H0 est vraie, ou encore la probabilité d'avoir un faux positif(FP) : *P(H1/H0)P(H0)*
    - 1- α est la probabilité de choisir H0 alors que H0 est vraie, ou encore la probabilité d'avoir un vrai négatif (VN)
  - Erreur de deuxième espèce β
    - La probabilité de choisir H0 alors que H1 est vrais, ou encore, la probabilité d'avoir un faux négatif (FN) : *P(H0/H1)P(H1)*
    - 1- β est la probabilité de choisir H1 alors que H1 est vraie, ou encore la probabilité d'avoir un vrai positif (VP)

Vérité / Décision	H0	H1
H0	1- α	β
H1	α	1- β

Exercices

- Un système linéaire invariant est caractérisé par la réponse impulsionelle suivante:

  {h(n)} = [2 5 3 1]

  déterminer la réponse y(n) de ce système quand le signal d'entrée est donné par:
  - a) [x(n)]= [2 7 4]
  - b) [x(n)]= [3 6 1 2 4]
- Soit Y=aX+b. *a* et b sont deux valeurs constantes.
  - 3.a. Montrer que si $X = N(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
  - 3.b. Calculer la covariance de X et Y.
- Soit un processus stationnaire X(n) représenté par le modèle AR d'ordre M. v(n) est un bruit blanc avec une moyenne nulle. Calculer l'espérance de X(n). Estimer les coefficients w_1 et w_2 si M=2.

  $$X(n) - w_1 X(n-1) - w_2 X(n-2) - .... - a_M X(n-M) = v(n)$$

- Considérons un processus aléatoire X(t) donné par X(t)=Acos(wt+θ) où w et θ sont des constantes et A est une variable aléatoire avec une moyenne de a_o. Montrer que X(t) n'est pas stationnaire au sens large.
- Soit un signal aléatoire y= a_i + b, où i=1,2, b est un bruit blanc gaussien ~ N(0, σ^2). On utilise le rapport de vraisemblance pour détecter a_1 ou a_2 dans le cas de P(a1)= P(a2).
  - Démontrer le seuil optimal $\lambda 0$ = (a1 + a2)/2 conduit à une probabilité minimum d'erreur.
  - Soit P(a1)=0.75, P(a2)=0.25, σ2=1. a1 = -a2= A. Calculer le seuil optimal.

Références

1. *Patrick Duvaut, « Traitement du Signal, conception et applications », Edition Hermes*
2. *Michel Barret, « Traitement statistique du signal », Edition Ellipses.*
3. *Hwei Hsu, traduction Francis Cottet, « Signaux et communications », Edition EdiScience.*