

Chapitre 1 – Le champ électrique

I. Champs électrique créé par des charges fixes : le champ électrostatique

1) Introduction : Phénomène d'électrisation

L'expérience montre qu'en frottant certain corps tel que le verre ou le plastique, on les rend capables de s'attirer ou de se repousser, c'est-à-dire exercer des forces. Ce phénomène a été interprété en considérant qu'il apparait une certaine quantité d'électricité ou charge électrique sur l'objet frotté.

Au 18^e siècle on a établi l'existence de deux types de charges : positive et négative. On a aussi constaté que deux charges de même signe se repoussent et deux charges de signe contraire s'attirent.

La charge électrique est quantifiée, c'est-à-dire qu'une charge quelconque vaut un nombre de fois la charge élémentaire « $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ » : $Q = n \cdot e$

Le Coulomb est l'unité de la charge.

Ceci vient de la découverte que la matière est constitué d'atomes eux-mêmes constitués de protons et électrons

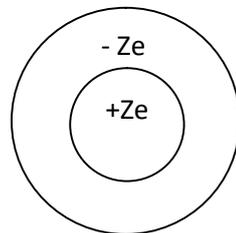


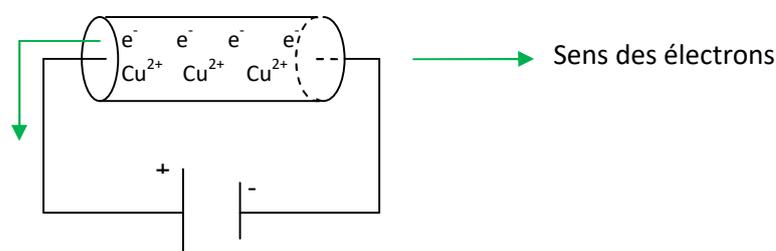
Fig.1 : Modèle de Bohr

Si on ajoute des e^- l'atome est négatif, si on en enlève il est positif

Exemple : Carbone \rightarrow Noyau $+6e$ Electrons $-6e$

Conducteurs et isolants

Définition : Dans certain matériaux comme les métaux les charges électriques sont libres de se déplacées, ce sont des matériaux conducteurs. Un métal est formé d'un réseau d'ions positifs liés les uns aux autres et d'un ensemble d'électrons libres de se déplacés à l'intérieur de ce réseau. C'est le déplacement de ces électrons libres qui constituent le courant électrique.

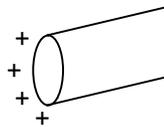


Dans un conducteur ou un isolant la charge totale est nulle (car le matériau est électriquement neutre). Dans certains matériaux comme dans le verre ou le plastique, il n'y a pas d'électrons libres. Chaque électron est lié à un atome ou une molécule du solide. Ces matériaux sont des isolants. (Cette année on ne parlera pas des semi-conducteurs)

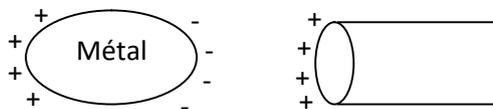
Electrisation par frottement et par influence

Lorsque l'on frotte l'un sur l'autre deux isolants, l'un arrache des électrons à l'autre, par exemple un chiffon arrache des électrons à un bâton de verre, le bâton de verre va se charger positivement, comme les charges sont incapables de se déplacer dans les isolants, elles restent en place sur chacun des objets.

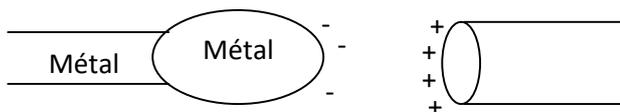
→ Un isolant est électrisé (c'est-à-dire chargé électriquement) par frottement



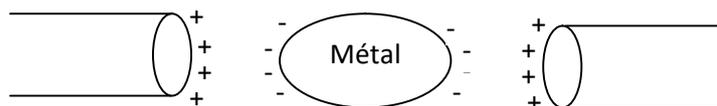
Si l'on approche un isolant chargé électriquement d'un conducteur, sans le toucher, la répartition des charges va être modifiée à l'intérieur du conducteur. Par exemple : un bâton de verre chargé positivement va attirer de son côté, les électrons libres de ce conducteur, de l'autre côté apparaît des charges positives car la matière est électriquement neutre.



Si on touche le conducteur par un autre conducteur, les électrons libres de celui-ci vont neutraliser une partie des charges positives du précédent conducteur.



Pour rendre le premier conducteur totalement négatif il vaut mieux l'approcher par deux bâtons



→ Un conducteur est électrisé par influence

2) Champs créé par une charge ponctuelle

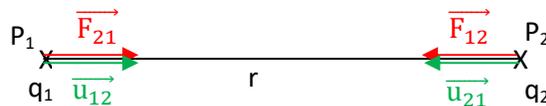
1. Loi de Coulomb (18^e siècle)

On s'intéresse maintenant à des charges ponctuelles immobiles (objets de petites dimensions).
Electrostatique = la charge ponctuelle ne bouge pas

La loi de coulomb exprime la force d'interaction entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 situées en des points P_1 et P_2 de l'espace. Coulomb a montré expérimentalement que cette force d'interaction :

- Est dirigée selon la droite P_1P_2
- Est attractive si les charges sont de signes contraires, et elle est répulsive si les charges sont de mêmes signes
- Est proportionnelle à q_1 et q_2
- Est inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les deux charges

Expression vectorielle :



q_1 et q_2 sont de signes contraires

- \vec{F}_{12} = Force exercée par q_1 sur q_2

\vec{u}_{12} est un vecteur unitaire dirigé de q_1 vers q_2

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{12} = q_2 \vec{E}_1 \quad \vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{12}$$

$$\vec{u}_{12} = -\vec{u}_{21}$$

- \vec{F}_{21} = Force exercée par q_2 sur q_1

\vec{u}_{21} est un vecteur unitaire dirigé de q_2 vers q_1

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{21} = q_1 \vec{E}_2 \quad \vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{21}$$

Remarque : $||F_{12}|| = ||F_{21}||$ les modules sont de mêmes intensité

$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$ la somme des forces est égale à zéro

La force électrique est égale à $\frac{1}{r^2}$, c'est une force newtonienne

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

Principe de superposition :

La force électrostatique créée par un ensemble de charges ponctuelles sur une charge q , est la somme vectorielle des forces électrostatiques créée par chacune des charges.

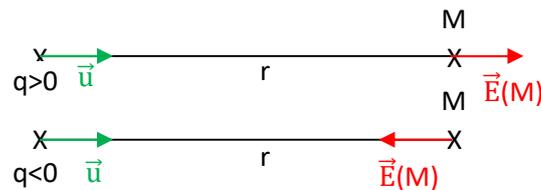
$$\vec{F}(q) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

2. Champ électrostatique

Définition : Dans l'exemple précédent, on peut considérer que la charge q_1 crée en tout point de l'espace, un champ électrostatique \vec{E}_1 une charge ponctuelle q_2 placée dans ce champ électrostatique est alors soumise à la force $\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1$

De même q_1 est placée dans un champ \vec{E}_2 créé par une charge q_2 et est soumise à la force $\vec{F}_{21} = q_1 \vec{E}_2$

A retenir :



$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

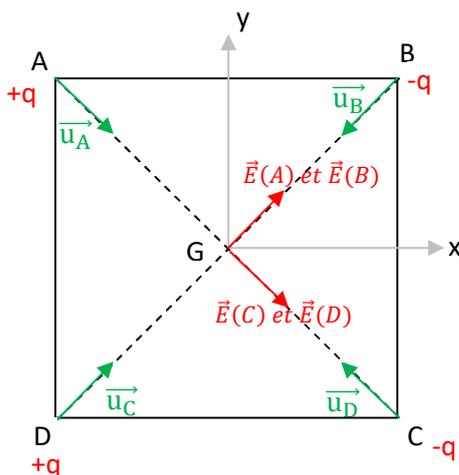
Si la charge est positive le champ est à l'extérieur de la charge, \vec{E} est suivant \vec{u}

Si la charge est négative le champ est à l'intérieur de la charge, \vec{E} est suivant $-\vec{u}$

Principe de superposition :

Le champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles en un point M de l'espace est la somme vectorielle des champs électrostatiques créés par chacune des charges.

Exemple de calcul : Charges aux sommets d'un carré de côté $2a$. Calculer \vec{E} au centre de gravité (G) du carré.



Dans notre formule, r est la distance de la charge considérée au point G (Ex : AG)
 \vec{u} part toujours de la charge vers le point M (ici G)

$$\vec{E}(G) = \vec{E}(A) + \vec{E}(B) + \vec{E}(C) + \vec{E}(D)$$

$$\vec{E}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(AG)^2} \vec{u}_A \quad \vec{E}(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(CG)^2} \vec{u}_C$$

$$\vec{E}(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(BG)^2} \vec{u}_B \quad \vec{E}(D) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(DG)^2} \vec{u}_D$$

Si on prend un repère xy sur G, $\vec{E}(G)$ est selon x

$$AG = BG = CG = DG = \frac{AC}{2}$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$$

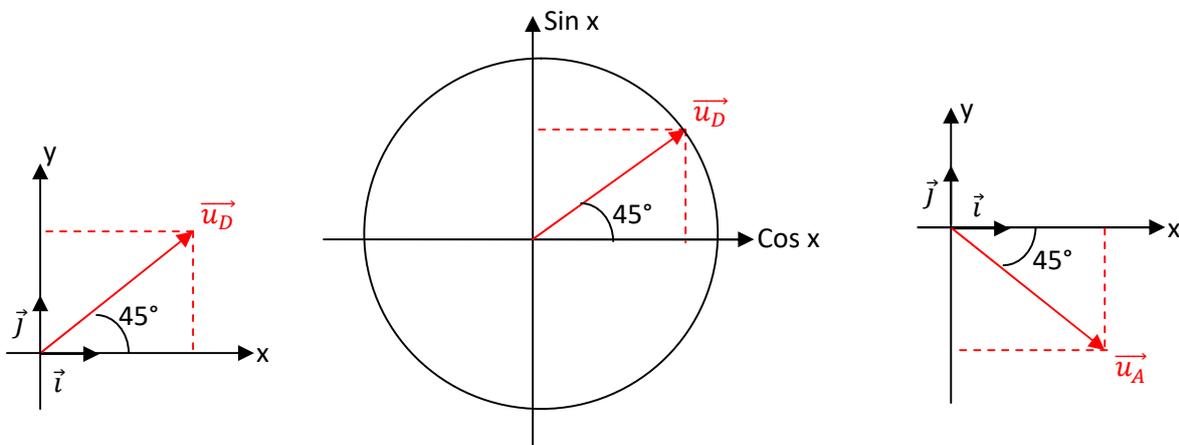
$$AC = \sqrt{8a^2} = a\sqrt{8} = a\sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times a = 2\sqrt{2}a$$

$$AG = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2} \quad AG^2 = 2a^2$$

$$\vec{E}(G) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 2a^2} [\vec{u}_A - \vec{u}_B - \vec{u}_C + \vec{u}_D]$$

$$\vec{u}_A = -\vec{u}_C \quad \text{et} \quad \vec{u}_D = -\vec{u}_B$$

$$\vec{E}(G) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a^2} [2\vec{u}_A + 2\vec{u}_D] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} [\vec{u}_A + \vec{u}_D]$$



$$\vec{u}_D = \cos(45) \vec{i} + \sin(45) \vec{j} \quad \vec{u}_A = \cos(45) \vec{i} - \sin(45) \vec{j}$$

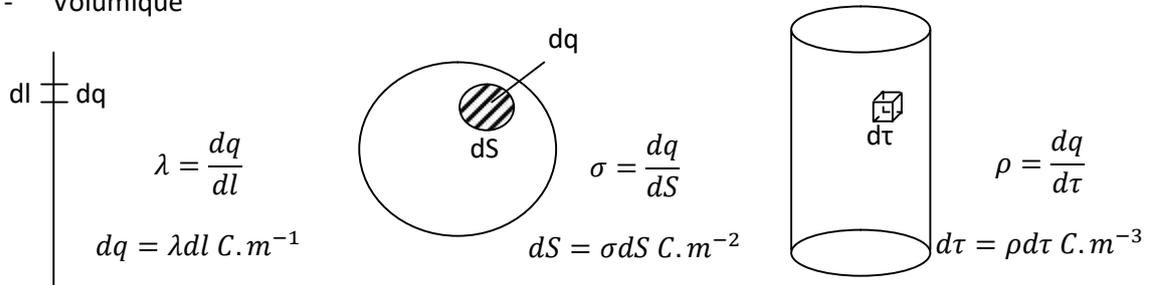
$$\vec{u}_D + \vec{u}_A = \cos(45) \vec{i} + \sin(45) \vec{j} + \cos(45) \vec{i} - \sin(45) \vec{j} = 2 \cos(45) \vec{i} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \vec{i} = \sqrt{2} \vec{i}$$

$$\vec{E}(G) = \frac{q\sqrt{2}\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

3) Champ créé par une distribution continu de charges

3 sortes de distribution :

- Linéique : fil infini
- Surfaccique : cylindre chargé uniquement en surface
- Volumique



Un nombre très important de charges élémentaires réparties le long d'un fil, sur une surface, ou dans un volume constitue une distribution continue de charges.

- Charge répartie le long d'un fil : Densité linéique de charge $\lambda = \frac{dq}{dl} \text{ (C. m}^{-1}\text{)}$
- Charge répartie sur une surface : Densité superficielle de charge $\sigma = \frac{dq}{dS} \text{ (C. m}^{-2}\text{)}$
- Charge répartie sur un volume : Densité volumique de charge $\rho = \frac{dq}{d\tau} \text{ (C. m}^{-3}\text{)}$

Pour calculer le champ créé par de telles distributions, on fait la somme continu des champs créés par chacune des charges élémentaires dq , c'est-à-dire, on fait l'intégrale (on intègre).

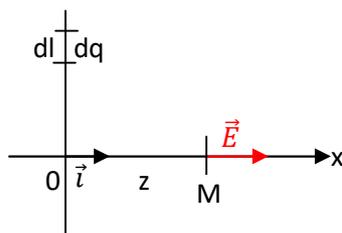
Méthode de calcul : (Voir TD)

Exemple :

- Ce qu'on doit trouver :

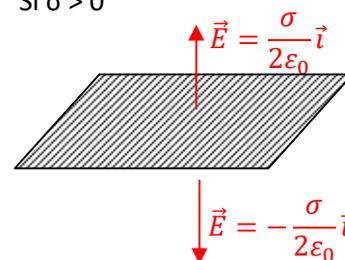
Le fil infini $\rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \vec{i}$;

Le plan infini $\rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$

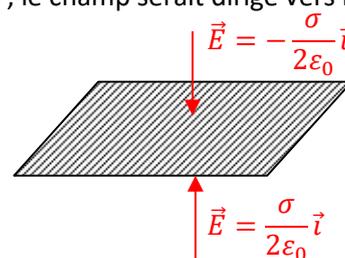


$z =$ distance au point M

Si $\sigma > 0$

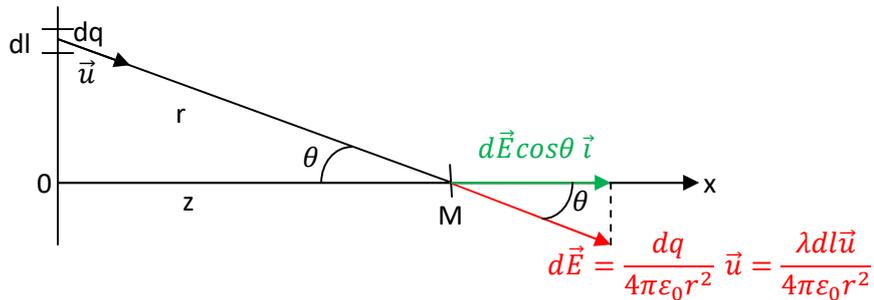


Si $\sigma < 0$, le champ serait dirigé vers le plan



Application :

- Calculer le champ \vec{E} distribué par un fil infini, au point M



Ce qui est important, c'est $d\vec{E}\cos\theta\vec{i}$ car si on prend le symétrique de dl pour trouver \vec{E} alors leurs coordonnées en sin x s'annule, il ne reste que leurs coordonnées en cos x qui sont identiques.

$$dE \cos \theta = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

$$E = \int dE \cos \theta = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

On a dl, r et θ qui varie, on choisi d'exprimer dl et r en fonction de θ , soit :

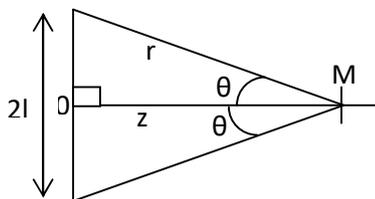
$$\tan \theta = \frac{l}{z} \rightarrow l = z \tan \theta$$

$$\int \tan \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow \frac{dl}{d\theta} = \frac{z}{\cos^2 \theta} \rightarrow dl = \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta$$

On a donc :

$$dE \cos \theta = \frac{\lambda dl \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda \times \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \times \frac{z^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 z}$$

Pour résoudre on prend d'abord un fil fini :



$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 z} \int_{-\theta_M}^{\theta_M} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 z} [\sin \theta]_{-\theta_M}^{\theta_M} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 z} [\sin \theta_M - \sin(-\theta_M)]$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 z} 2 \sin \theta_M = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \sin \theta_M$$

La fonction sinus est une fonction impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$

La fonction cosinus est une fonction paire : $\cos(-x) = \cos(x)$

Dans le fil fini, on peut trouver $\sin(\theta_M)$ en faisant :

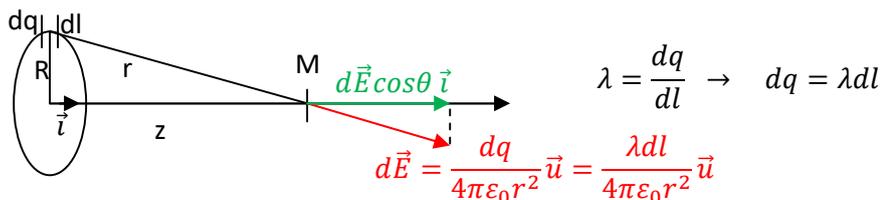
$$\sin \theta_M = \frac{l}{r} = \frac{l}{(z^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Pour un fil infini :

$$\theta_M = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta_M = 1$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \vec{i}$$

- Calculer le champ \vec{E} distribué par une spire en un point M :



$$dE \cos \theta = \frac{\lambda dl \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \int dl$$

$$E = \frac{\lambda 2\pi R \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$E = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 r^2}$$

$$l = 2\pi R$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r}$$

$$r^2 = z^2 + R^2$$

$$r = (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$r^3 = (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}$$

Rappels :

Surface d'un disque = πR^2

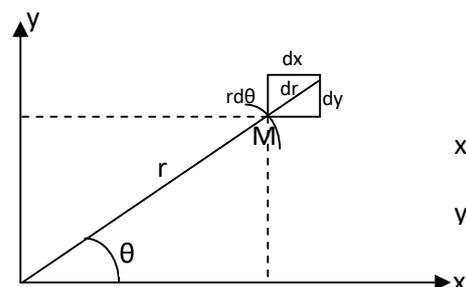
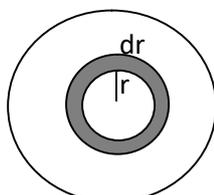
$(r ; \theta)$ coordonnées polaires

$(x ; y)$ coordonnées cartésiennes

$M(x ; y) \rightarrow M(r ; \theta)$

$$dS = dx dy \quad \theta \rightarrow d\theta$$

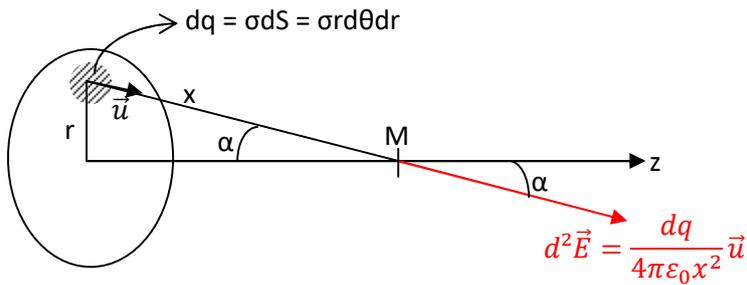
$$dS = r d\theta dr$$



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

- Calculer le champ \vec{E} distribué par une surface en un point M :



$$d^2 E \cos \alpha = \frac{\sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos \alpha$$

$$\int d^2 E \cos \alpha = \frac{\sigma r dr 2\pi}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos \alpha = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 x^2} \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{r}{z} \rightarrow r = z \tan \alpha$$

$$dr = \frac{z}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$dE = \frac{\sigma z \tan \alpha \frac{z}{\cos^2 \alpha} d\alpha \cos \alpha}{2\epsilon_0 \frac{z^2}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sigma \tan \alpha d\alpha \cos \alpha}{2\epsilon_0}$$

$$\tan \alpha \times \cos \alpha = \sin \alpha$$

$$dE = \frac{\sigma \sin \alpha d\alpha}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha$$

$$(-\cos \alpha)' = \sin \alpha$$

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\cos \alpha]_0^{\alpha_M}$$

$$\cos \alpha_M = \frac{z}{x} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\cos \alpha_M - 1] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \vec{i}$$

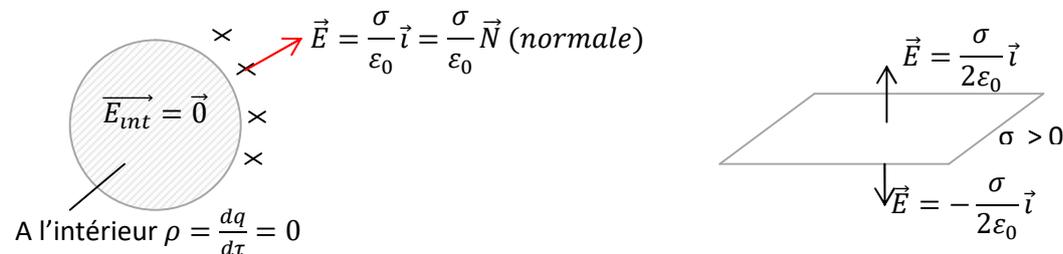
Si R tend vers l'infini, le disque devient un plan infini :

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \rightarrow 0 \text{ alors } \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

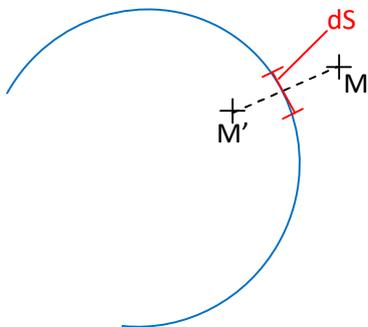
Champ et conducteur en équilibre :

Un conducteur est en équilibre si les charges qu'il porte ne se déplacent pas. Un conducteur en équilibre chargé électriquement, ne porte les charges qu'en surface, à l'intérieur $\rho = \frac{dq}{d\tau} = 0$.

Conséquence : le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur est nul.



Champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre :



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (\text{avec } \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \text{ plan infini car } M \text{ très proche de la surface})$$

$$\vec{E}(M') = \vec{E}_1' + \vec{E}_2' \quad (\text{avec } \vec{E}_1' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} = -\vec{E}_1)$$

$$\vec{E}_2' = \vec{E}_2 \quad \text{car } M \text{ et } M' \text{ sont très voisins}$$

Ce qui donne :

$$0 = -\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_1$$

$$\vec{E}(M) = 2\vec{E}_1 = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

Théorème de Coulomb :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}}$$

4) Théorème de Gauss

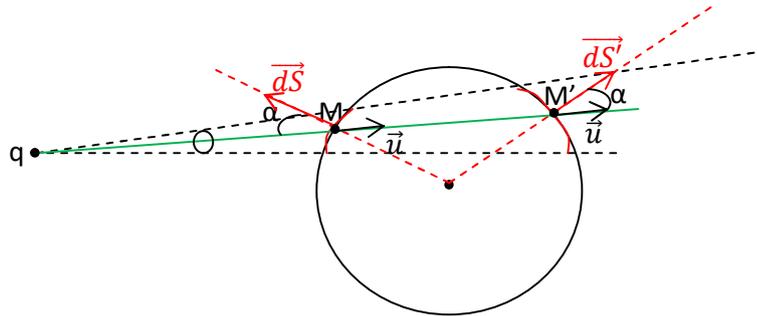
1. Définition du flux du champ \vec{E} à travers une surface fermée

On considère le champ \vec{E} (défini en tous points de l'espace) et une surface fermée S. Soit $d\vec{S}$ un élément de la surface, associé à \vec{dS} (normale à l'élément de surface, dirigé vers l'extérieur).

Le flux du champ \vec{E} à travers S est :

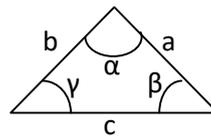
$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

2. Flux du champ \vec{E} créé par une charge ponctuelle à l'extérieur de la surface fermée



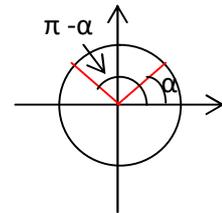
$$\begin{aligned} OM &= r & OM' &= r' \\ \vec{E}(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} & \vec{E}(M') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u} \\ \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{S} & \vec{E}(M') \cdot d\vec{S}' &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u} \cdot d\vec{S}' \end{aligned}$$

(Dans un triangle quelconque : $\frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{a}$)



$$\vec{u} \cdot d\vec{S} = \|\vec{u}\| dS \cos(\pi - \alpha) = -dS \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot d\vec{S}' = \|\vec{u}\| dS' \cos(\alpha) = dS' \cos \alpha$$



Par définition, l'angle solide c'est

$$d\Omega = \frac{|\vec{u} \cdot d\vec{S}|}{r^2} = \frac{|\vec{u} \cdot d\vec{S}'|}{r'^2} > 0$$

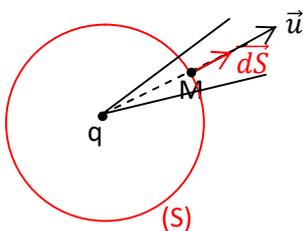
$$d\Omega = -\frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}'}{r'^2} > 0$$

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad \vec{E}(M') \cdot d\vec{S}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$E(M) \cdot dS + E(M') \cdot dS' = 0 \quad \Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

(Le flux à l'extérieur de cette surface est nul, aucune contribution).

3. Flux du champ \vec{E} créé par une charge ponctuelle à l'intérieur de la surface fermée



$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} & S &= 4\pi r^2 \\ \Phi &= \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

4. Théorème de Gauss

On étend le calcul précédent à l'ensemble des charges ponctuelles à l'intérieur de la surface fermée, la charge totale à l'intérieur de S est :

$$Q_{int} = \sum_i q_{int}$$

Le flux du champ électrostatique à travers d'une surface fermée S est égale au quotient par ϵ_0 , de la charge totale à l'intérieur de cette surface

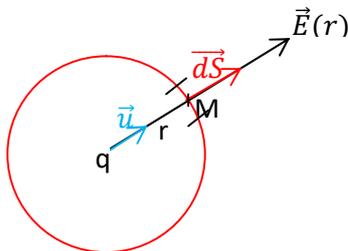
$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Ce théorème est applicable au fil infini, au cylindre et à la sphère.

Remarque : Le théorème de Gauss permet de retrouver la loi de Coulomb

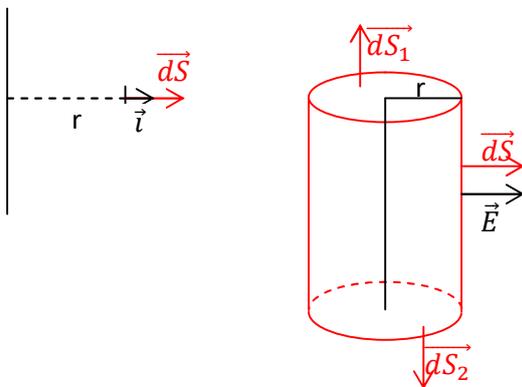
Pour l'appliquer :

- Il faut connaître la direction de \vec{E} et qu'elle ne change pas
- Il faut enlever les flèches
- Il faut sortir E de l'intégrale



$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \cdot dS = E \oiint dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \\ &\rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \end{aligned}$$

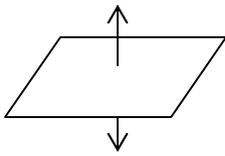
On doit démontrer que $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i}$ pour un fil infini en utilisant le théorème de Gauss :



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad q = \lambda l = Q_{int}$$

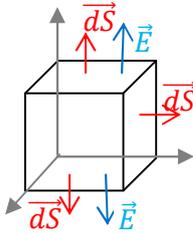
$$\begin{aligned} \phi &= \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \cdot dS = E \oiint dS \\ &= E \cdot 2\pi r^2 l = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \\ &\rightarrow E = \frac{\lambda l}{2\pi r^2 l \epsilon_0} \\ &\rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r^2 \epsilon_0} \vec{i} \end{aligned}$$

Cas du plan infini :



$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dq = \sigma dS \quad q = \sigma S = Q_{int}$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{0} \text{ car } \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Pour les 4 faces du contour : $\Phi = 0$, il reste la face du haut et du bas,

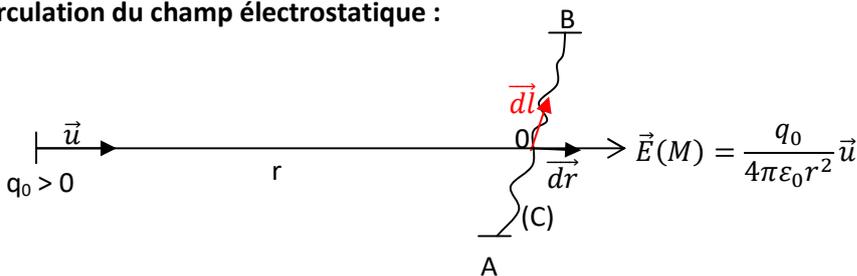
$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \cdot dS = E \oiint dS = E \cdot 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{\sigma S}{2S\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

5) Le potentiel électrostatique

1. Notion de potentiel électrostatique

Circulation du champ électrostatique :



$$\vec{F} = q\vec{E} \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right) = -d\left(\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = -dV$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2} \rightarrow d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \text{ avec } V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V(M) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B dV = -[V]_A^B = V_A - V_B$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$W_{AB} = q(V_A - V_B)$$

En J ou eV : $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

La charge q sera soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$

Le terme « $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ » s'appelle la circulation du champ \vec{E} de A à B le long de (C)

La circulation du champ électrostatique de A à B est égale à la différence de potentiel (ddp) entre A et B, et ne dépend pas du chemin suivi.

2. Energie potentielle électrique

La Force F dérive d'une énergie potentielle « $q.V$ » appelée énergie potentielle. On dit que la force F (électrostatique) est conservative.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} W = -\overrightarrow{\text{grad}} qV$$

Le travail (W) est exprimé en Joules (J) : $1\text{eV} = 1,6.10^{-19} \text{ J}$
eV : 1 électron apporte une différence de potentiel de 1V

3. Gradient d'une fonction

Le gradient est un opérateur vectoriel dont les composantes sont :

- En coordonnées cartésiennes $(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}) (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
- En coordonnées cylindriques $(\frac{\partial}{\partial \rho}; \frac{\partial}{\rho \partial \varphi}; \frac{\partial}{\partial z}) (\vec{u}_\rho; \vec{u}_\varphi; \vec{u}_z)$
- En coordonnées sphériques $(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{\partial}{r \partial \theta}; \frac{\partial}{r \sin \theta}) (\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{u}_\varphi)$

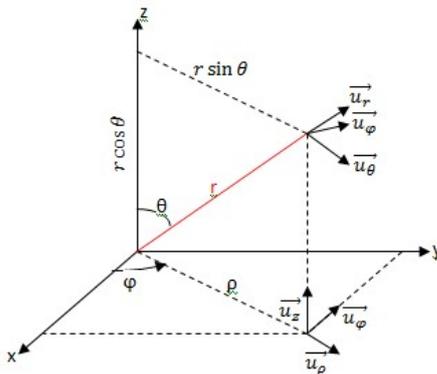
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta = -2\pi [\cos \theta]_0^{\pi}$$

$$= -2\pi (\cos \pi - \cos 0)$$

$$= -2\pi (-1 - 1) = 4\pi$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \vec{e}_r$$

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{matrix} M(x \ y \ z) & \rightarrow & (r \ \theta \ \varphi) \\ \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ dx \ dy \ dz & & dr \ r d\theta \ r \sin \theta d\varphi \\ & & \underbrace{d\Omega = 4\pi} \end{matrix}$$

$$dV = dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

Soit V une fonction scalaire. Les expressions correspondantes du gradient de V sont :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{\partial V}{\rho \partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

- En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{r \sin \theta \partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

On peut alors remarquer que :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = dV}$$

Formule intrinsèque (ne dépend pas du système de coordonnées).

En effet, en coordonnées cartésiennes $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz}_{\text{Définition de la différentielle totale de } V} = dV$$

Définition de la différentielle totale de V

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = -dV$$

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl} = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, y, z) \\ E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V(r, \theta, \varphi) \\ E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{e}_\theta \\ E_\varphi = -\frac{\partial V}{r \sin \theta \partial \varphi} \vec{e}_\varphi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V(r, \theta, z) \\ E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{e}_\theta \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \end{array} \right. \text{Coordonnées Polaires}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \vec{dl} &= d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{u}_z \\ \rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl} &= \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \rho d\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{dl} &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \\ \rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl} &= \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} r d\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} r \sin \theta d\varphi \\ &= \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi = dV \end{aligned}$$

4. Relation champ - potentiel

On a établi précédemment que $\vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right) = -d\left(\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$ avec $V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dl} = -dV \text{ or } dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl}$$

$$\rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Le champ électrostatique dérive du potentiel :

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Et par conséquent comme :

$$\vec{F} = q\vec{E} \text{ alors } \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} qV$$

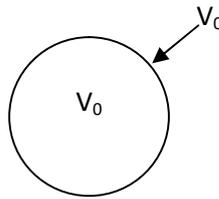
La force électrostatique dérive de l'énergie potentielle qV.

Remarques :

i) Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} V$ étant dirigé vers les valeurs croissantes de V , \vec{E} est dirigé vers les valeurs décroissantes de V ($V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow V_1 > V_2$ si $r_1 < r_2$ $\frac{\partial V}{\partial r} = \overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{1}{r^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} = \dots$)

ii) Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle $V = \text{cste} \rightarrow dV = 0$. Pour un déplacement \vec{dl} sur une surface équipotentielle $\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{dl} = 0 = \overrightarrow{\text{grad}} V$ et donc \vec{E} est normal à la surface équipotentielle.

iii) A l'intérieur d'un conducteur en équilibre, $\vec{E} = \vec{0}$. Donc le potentiel à la même valeur V_0 en tout point à l'intérieur du conducteur en équilibre et la surface du conducteur est une surface équipotentielle, au potentiel V_0 .



Le champ est continu sauf quand le conducteur est chargé en surface, E est discontinu. V est toujours continu.

5. Application au calcul du champ électrostatique

Champ créé par une charge ponctuelle :

Par raison de symétrie, le champ créé par une charge ponctuelle q est un champ central. Les composantes de \vec{E} en coordonnées sphériques sont $(E, 0, 0)\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi$.

r étant la distance de la charge q au point considéré : $E = E(r)$

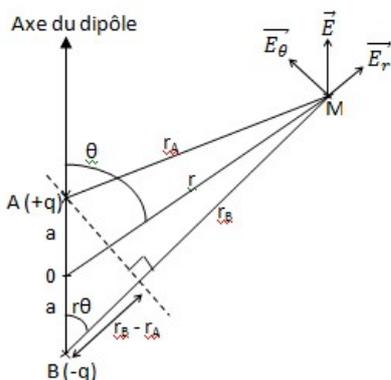
Le potentiel créé par la charge ponctuelle q à la distance r est : $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(Les surfaces équipotentielles sont des surfaces sphériques de centre 0).

6) Le dipôle électrostatique

Champ créé par une distribution de charges ponctuelles ($V = \sum V_i$)



Le potentiel créé en un point M par le dipôle $(-q, +q)$ est la somme des potentiels créés par chacun des monopôles.

$$V(M) = V_A + V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \quad \text{si } r \gg 2a \text{ (point loin du dipôle)}$$

alors $r_B - r_A \approx 2a \cos \theta$ et $r_A r_B \approx r^2$

$$\rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2}$$

On peut poser $\vec{p} = q\overline{BA}$ moment dipolaire $\rightarrow \|\vec{p}\| = 2a \cdot q$

Dans ce cas :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{p}\| \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

car $\vec{p} \cdot \vec{r} = \|\vec{p}\| r \cos\theta = 2a \cdot q \cdot r \cos\theta$ où $\vec{r} = \overline{OM}$

Par raison de symétrie, le champ en un point M est dans le plan $(\overline{BA}, \overline{OM})$

→ On donne les composantes de \vec{E} en coordonnées polaires :

$$\vec{E} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = +\frac{4qa \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} e_r = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} e_r$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta} = +\frac{1 \sin\theta q 2a}{r 4\pi\epsilon_0 r^2} e_\theta$$

Moment Dipolaire

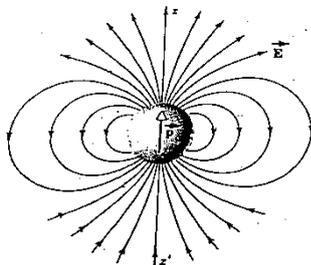


figure 4-10
Si l'objet dans la sphère produit un champ comme celui-ci (décrit par l'équation 4-11), il s'agit d'un dipôle électrique.

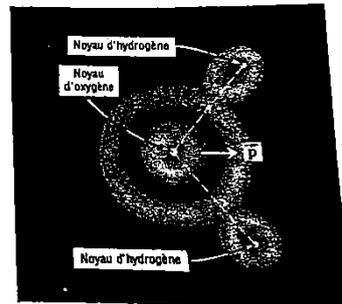


figure 4-11
Dessin d'une molécule d'eau sur lequel on peut observer les trois noyaux, les nuages électroniques et l'orientation du moment dipolaire.

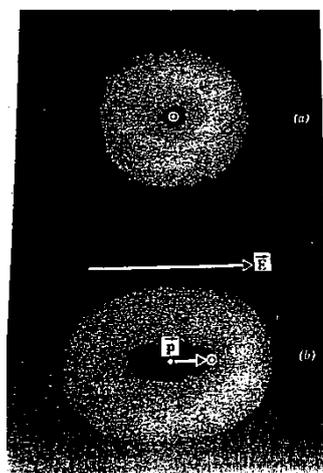
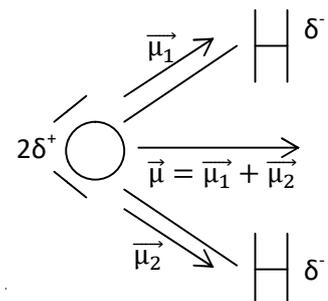


figure 4-12
(a) Représentation d'un atome illustrant le noyau et le nuage électronique. Le centre des charges négatives coïncide avec le centre des charges positives, le noyau. (b) Lorsque cet atome est placé dans un champ électrique extérieur \vec{E} , il y a perturbation du nuage électronique et le centre des charges négatives (le point) ne coïncide plus avec celui des charges positives. Il y a apparition d'un moment dipolaire. L'étirement de l'atome est exagéré.



Surfaces Equipotentielles et Lignes de Champ

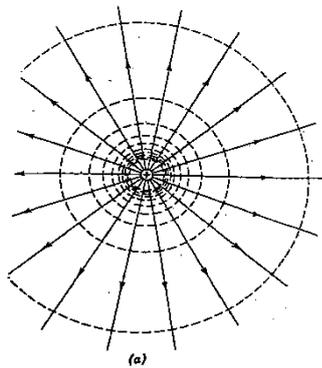
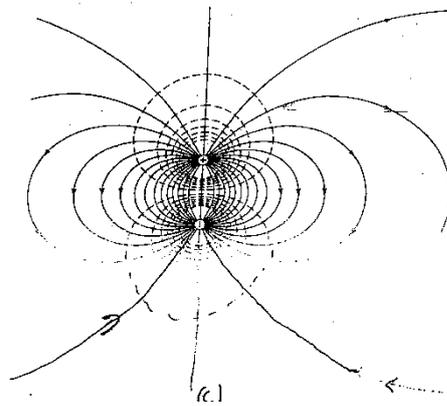
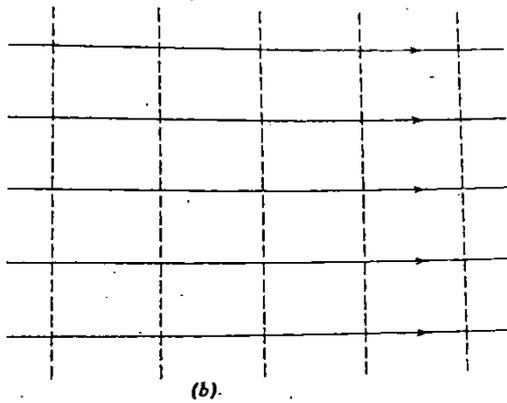
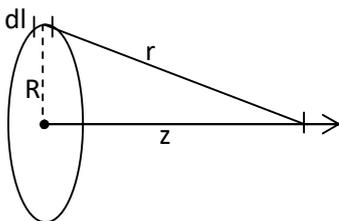


Figure 4-15
Surfaces équipotentielles, lignes pointillées et lignes de force (lignes pleines)
(a) d'une charge ponctuelle, (b) d'un champ électrique uniforme produit par un arrangement de charges non illustré et (c) d'un dipôle électrique. En (a) et en (c), les pointillés représentent les lignes d'intersection de surfaces fermées avec le plan de la figure; en (b) les pointillés correspondent à des plans infinis. Dans ces trois schémas, l'écart de potentiel entre deux surfaces équipotentielles voisines est ΔV . Ainsi, d'après l'équation 4-14 qui a la forme $\Delta l = -\Delta V/E$ si $\theta = 180^\circ$, les surfaces sont assez rapprochées lorsque le module de E est grand et elles sont assez espacées lorsque ce module est faible. De la même façon (voir section 2-3), les lignes de force sont serrées quand E est élevé et elles sont espacées quand E est faible.



Application : L'anneau



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \lambda dl$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r^2 = R^2 + z^2$$

$$r = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} (R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

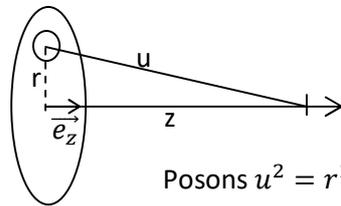
$$E_z = -\frac{dV}{dz} \text{ (ne dépend que de } z\text{)}$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\left[\frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\right] \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2z \times (R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

Application : Le disque



$$\sigma = \frac{dq}{dS} \rightarrow dq = \sigma dS$$

$$dq = \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 u} = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 u}$$

$$= \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Posons $u^2 = r^2 + z^2$
 $2u du = 2r dr$

$$V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{udu}{u}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{R^2 + z^2} - z]$$

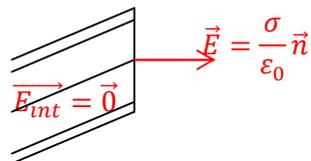
$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} (z^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2z - 1 \right) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

Dans le cas où la symétrie ne permet pas d'utiliser le théorème de Gauss, on calcule d'abord le potentiel V avec $V = \int dV$, le potentiel en un point et la somme algébrique de tous les potentiels élémentaires créés en un point par les éléments de la distribution.

7) Capacité d'un conducteur

1. Conducteur en équilibre

Cas d'un conducteur unique



Dans le cas d'un conducteur en équilibre unique, isolé dans l'espace, on peut faire les constatations suivantes :

- Le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul, alors le potentiel est constant (Si la dérivée de v est nulle alors v une constante = v_0 car $E = -\text{grad } V$)
Toutes les grandeurs électrostatique sont continus sauf quand un conducteur est chargé en surface.
- La surface du conducteur est une équipotentielle égale à V_0
Ca implique qu'au voisinage extérieur de la surface, E est normale à la surface et $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

Si Q est la charge totale à la surface du conducteur alors $Q = C \cdot V_0$ où C est la capacité du conducteur isolé, son unité est le Farad. C dépend de la géométrie du conducteur.

Unicité d'équilibre :

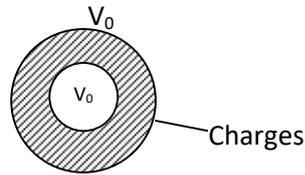
L'état d'équilibre est défini de façon unique par la donnée du seul potentiel V_0

Exemple : Le cas du conducteur sphérique de rayon R qui porte une charge Q et de potentiel V_0

On montre que $C = 4\pi\epsilon_0 R$

[Car $V_0 = Q/4\pi\epsilon_0 R \rightarrow Q = (4\pi\epsilon_0 R) \cdot V_0 = C \cdot V_0$]

Dans le cas d'un conducteur creux,

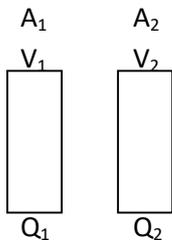


La surface interne est une équipotentielle (=potentiel constant) au potentiel V_0 du conducteur et la cavité toute entière est elle aussi au potentiel V_0 car $E=0$. La surface interne ne porte pas de charge.

Système de conducteur en équilibre

- Principe de superposition des états d'équilibre :

La superposition de deux états d'équilibre est un état d'équilibre



On démontre que :

$$C_{12} = C_{21}$$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

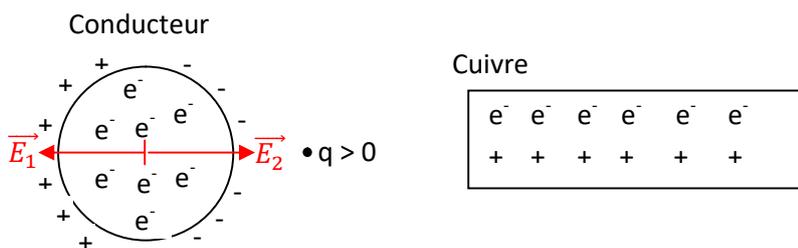
$$Q_2 = C_{12}V_1 + C_{22}V_2$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

2. Phénomène d'influence

Cas d'un conducteur massif

On considère un conducteur isolé, électriquement neutre. On approche de ce conducteur, un système de charge qui crée un champ E_1 .



Si on approche une charge positive d'un conducteur, les électrons sont attirés

- ⇒ Les électrons sont soumis à une force :

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}_1$$

- ⇒ Une charge \vec{E}_1 apparaît dans le matériau.

Le champ E_1 entraîne un déplacement des électrons libres du conducteur. Ce qui implique l'apparition de charges à la surface du conducteur.

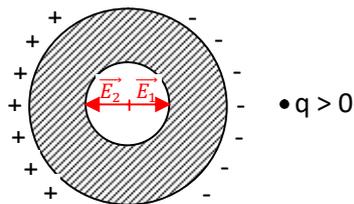
Le déplacement cesse quand l'équilibre est atteint, c'est – à – dire, quand le champ E_2 crée par la distribution superficielle de charge, annule le champ E_1 à l'intérieur du conducteur.

On admet que la distribution est unique.

- Etat initial : Pas de charge superficielle $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
- On approche $q > 0 \rightarrow$ Apparition de $E_1 \rightarrow$ Mouvement des charges (Figure avec E_1 seulement)
- Etat d'équilibre : (Voir figure) Conducteur neutre

Cas du conducteur creux

- Influence extérieure

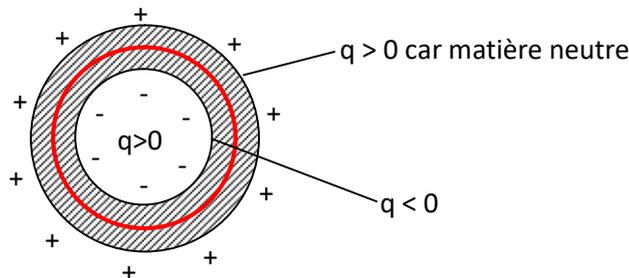


Ces charges apparaissent uniquement sur la surface extérieure du conducteur. L'état d'équilibre est unique.

Absence de charge sur la surface intérieure. De l'intérieure on ne voit pas la charge q . Le conducteur est alors un écran électrostatique : cage de Faraday.

- Influence totale

On place la charge q dans la cavité du conducteur creux.



Théorème de Gauss :

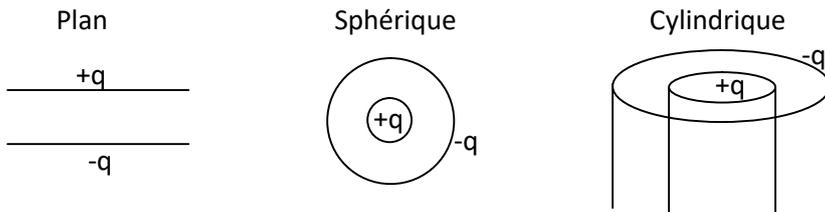
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{q + x}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \vec{0}$$

Il y a apparition de charges sur la surface intérieure (charge totale $-q$) qui se vérifie à l'aide du théorème de Gauss, car le champ étant nul dans la masse du conducteur en équilibre. Comme le conducteur est neutre, cela implique l'apparition de charges sur la surface extérieure (charge totale $+q$).

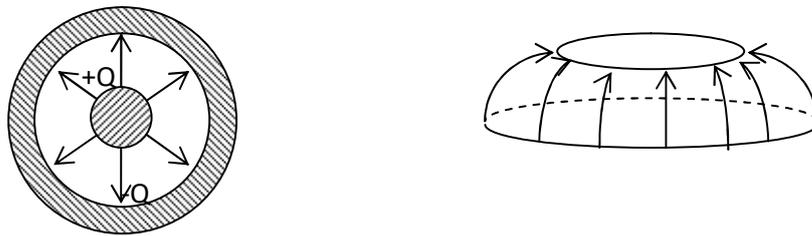
Ce qui implique que le système équivaut à un conducteur plein portant la charge $+q$ sur la surface extérieure.

3. Condensateur et diélectrique

Condensateur :



Un condensateur est constitué de deux conducteurs, de bornes quelconques, en influence totale, portant les charges $+q$ et $-q$. Ces conducteurs sont appelés « armatures ». Ce qui implique qu'un conducteur entoure complètement l'autre, car les champs $+Q$ et $-Q$, qui émanent du premier sont capter complètement par le deuxième (Les lignes de champs).

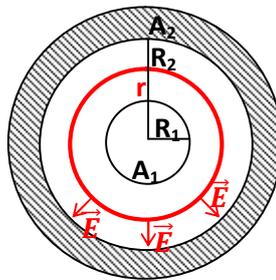


Remarque : Les armatures sont en influence totale si toutes les lignes de champs qui quittent l'armature $+Q$ aboutissent à l'armature $-Q$.

Un condensateur est caractériser par sa capacité C : $Q = C(V_1 - V_2)$

Exemple de condensateur :

- Condensateur sphérique :



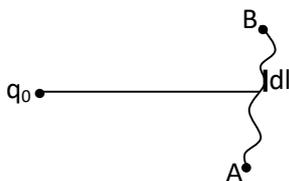
Ici le milieu entre les deux armatures est le vide.

A_1 Porte la charge $+Q$ répartie uniformément en surface, et est de potentiel V_1

A_2 porte la charge $-Q$, de potentiel V_2

Entre les armatures, le champ E est central : $E_r = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ (Théorème de gauss)

Circulation du champ électrique : $\int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$



$$d\vec{W} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{AB} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_A^B = V_A - V_B$$

Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

1. On fait sauter les flèches car l'angle $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow \oiint E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$

2. E sort de l'intégrale car il est constant $\rightarrow E \oiint dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$

3. Calcul :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = V_1 - V_2$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{r^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{r} \quad \left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = V_1 - V_2$$

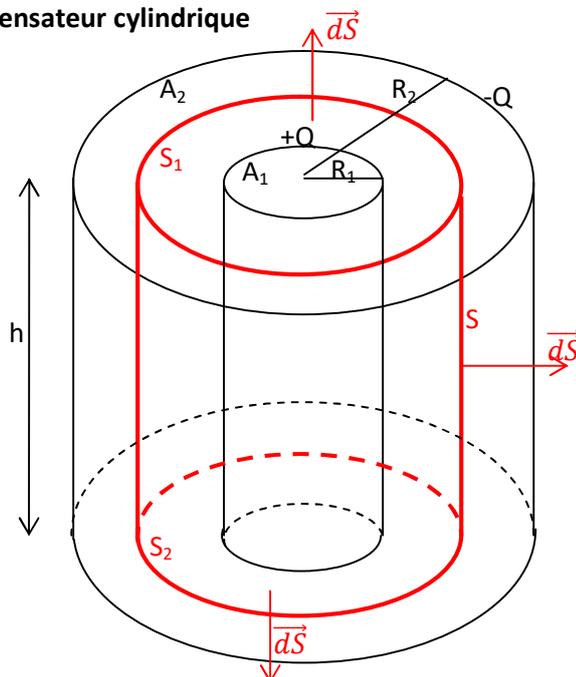
$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = V_1 - V_2$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \right] = V_1 - V_2$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Capacité d'un condensateur sphérique

- Condensateur cylindrique



Ici le milieu entre les deux armatures est le vide.

A₁ Porte la charge +Q répartie uniformément en surface, et est de potentiel V₁

A₂ porte la charge -Q, de potentiel V₂

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi R h = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

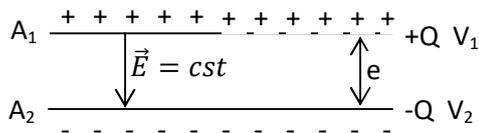
$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \quad \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r$$

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} dr = V_1 - V_2$$

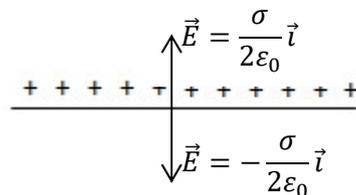
$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} = V_1 - V_2$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

• Condensateur plan



Pour un plan infini :



Au milieu :

$$E = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} e = V_1 - V_2 \quad \sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{Q}{S}$$

$$\frac{Q}{S\epsilon_0} e = V_1 - V_2$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S\epsilon_0}{e}$$

L'espace entre les armatures du condensateur peut être rempli par un matériau isolant (diélectrique)

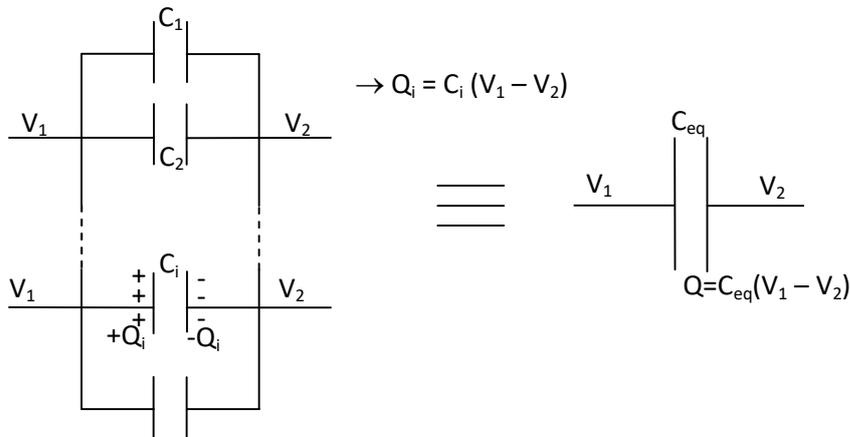
Il faut remplacer le ϵ_0 par ϵ tel que $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

	Eau	Ge	Si	Verre	Air
ϵ_r	79	16	12	9	1

($\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$)

Association de condensateur :

- En parallèle :



La charge totale, c'est la somme des charges :

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i C_i (V_1 - V_2)$$

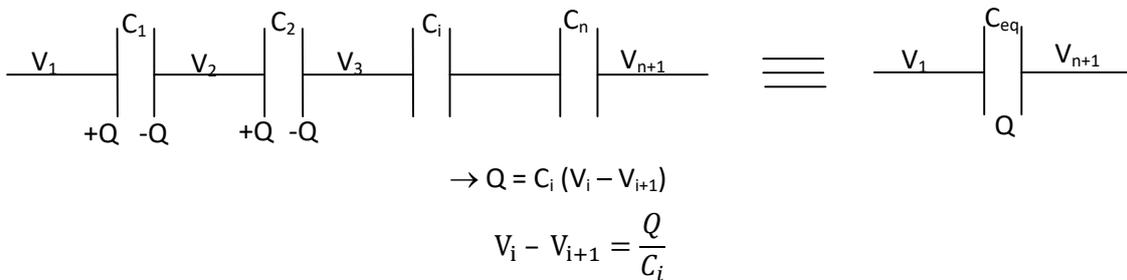
On cherche à remplacer tous ces condensateurs par un seul.

Le C_{eq} c'est la somme des C_i

$$C_{eq} = \sum_i C_i = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

⇒ Quand ils sont en parallèle, ils s'additionnent

- En série :



Si on somme sur i :

$$\sum_i (V_i - V_{i+1}) = \sum_i \frac{Q}{C_i}$$

$$(V_1 - V_2 + V_2 - V_3 + \dots + V_n - V_{n+1})$$

$$\rightarrow V_1 - V_{n+1} = Q \sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\rightarrow Q = C_{eq} (V_1 - V_{n+1})$$

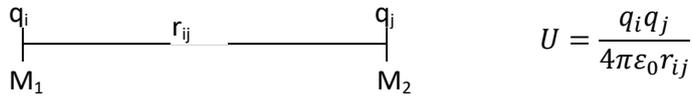
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Le fil est neutre donc il doit rester neutre (s'il voit une charge $-q$ d'un côté, il doit voir une charge $+q$ de l'autre)

8) Energie potentielle électrostatique

1. Energie d'un système de charges ponctuelles

- Système de 2 charges (q_i, q_j)

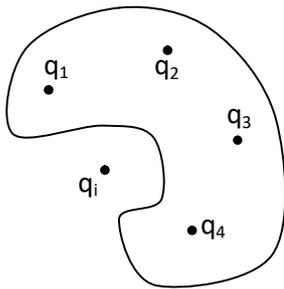


$q_i \times V(q_j)$
 ▲ Charge soumise au potentiel de q_j

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} qV$$

L'énergie potentielle de deux charges q_i et q_j est l'énergie nécessaire pour amener q_j en un point M_2 (q_i étant en M_1).

- Système de n charges ponctuelles



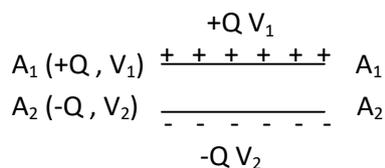
$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \times \underbrace{\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}}_{V_i}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

2. Energie d'un système de n condensateur en équilibre

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

3. Energie d'un condensateur



$$U = \frac{1}{2} QV_1 - \frac{1}{2} QV_2$$

$$= \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2} QV$$

$$Q = CV$$

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

II. Champ électrocinétique et charges en mouvement

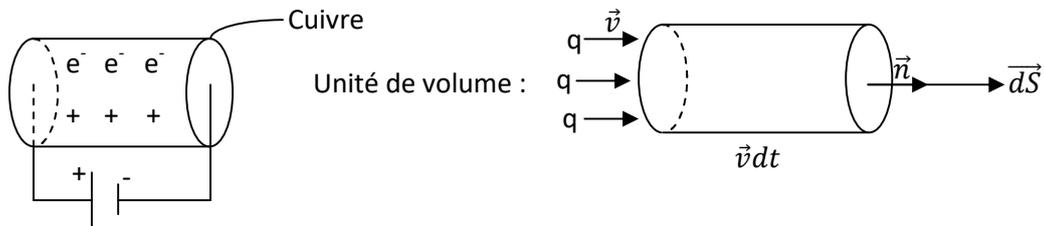
1) Vecteur densité de courant

1. Définition

On cherche à démontrer :

$$I = \oiint \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Avec \vec{j} la densité de courant



Soit un ensemble de particules identiques, de charge q et animées d'une vitesse \vec{v} .

Soit n le nombre de particules par unité de volume

Quelle est la charge dQ traversant pendant le temps dt une surface dS ?

$$dQ = n(\vec{v} dt \vec{dS}) q$$

(On peut enlever les flèches car v et dS sont dans le même sens)

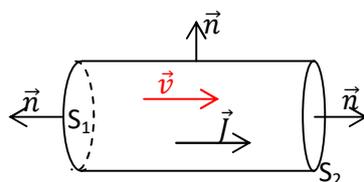
$$\frac{dQ}{dt} = dI = n \vec{v} q \vec{dS} = \rho \vec{v} \quad \rho = \frac{dq}{dt}$$

On note donc $\vec{j} = nq\vec{v}$ appelée densité de courant en $A.m^{-2}$

Dans un conducteur en équilibre $E_{int} = 0$ car il n'y a pas de charge à l'intérieur, tout ce passe comme si la vitesse moyenne est nul, donc $j = 0$.

En réalité si on fait un calcul très précis on arrive à une vitesse de 0,1 à 1 mm / s mais on suppose que c'est nul.

En régime permanent, le flux de j à travers une surface fermée est nul.



$$\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \vec{0} = \iint_{latérale} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \rho v dS - \iint_{S_1} \rho v dS = \vec{0}$$

Sur la surface latérale, $\vec{j} = \vec{0}$ car $\vec{j} \perp d\vec{S}$

Sur les deux bases, $\vec{j} = \vec{0}$ à cause de l'orientation de \vec{n} (ça s'annule)

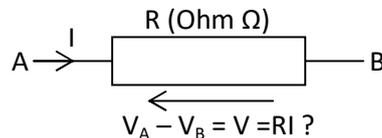
2. Courant électrique dans un fil

$$I = \iint_{\text{Section du fil}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

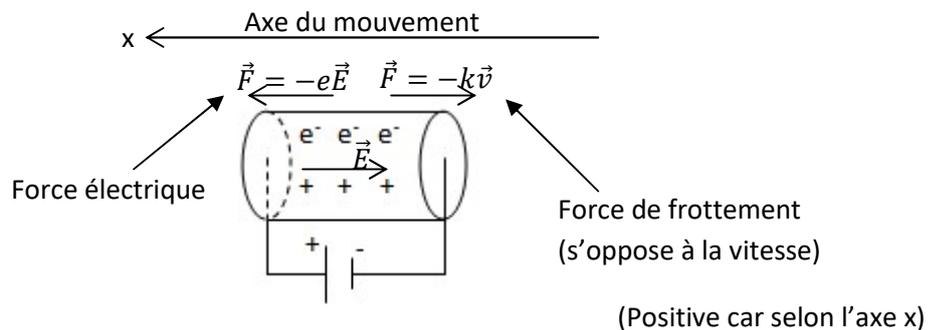
L'intensité du courant électrique dans un fil est égale au flux de j à travers la section du fil

2) Loi d'Ohm

On suppose que les charges se déplacent sous l'effet d'un champ électrique (c'est le cas d'un conducteur métallique homogène parcouru par un courant i , aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R)



On va établir la forme locale de la loi d'Ohm dans le cas d'un fil conducteur



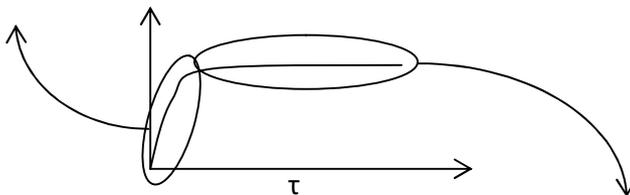
Les électrons sont attirés par la borne positive.

On écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{frottement}} = e\vec{E} - k\vec{v}$$

A $t = 0$, $v = 0$

Régime transitoire : (quelque ms) la vitesse monte lentement (Solution de l'équation sans 2nd membre)



Régime permanent : La vitesse est constante (solution particulière [On enlève la dérivée])

2nd membre = eE

Solution sans 2nd membre : $m \frac{dv}{dt} = -kv$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{k}{m} dt \\ \int \frac{dv}{v} &= \int -\frac{k}{m} dt \\ \ln v &= -\frac{k}{m} t + cte \quad (cte = \ln A) \\ \ln \frac{v}{A} &= -\frac{k}{m} t \\ \frac{v}{A} &= e^{-\frac{k}{m} t} \quad (e^{\ln x} = x) \\ \rightarrow v &= Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{m}{k} \\ & \text{(Régime transitoire)} \end{aligned}$$

Solution particulière : $eE - kv$

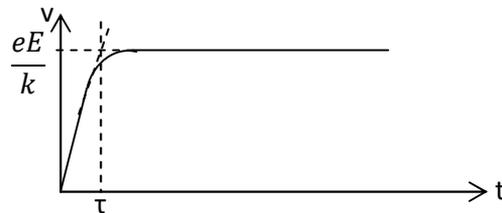
$$\rightarrow v = \frac{eE}{k}$$

A t = 0, v = 0

$$\begin{aligned} \rightarrow v = 0 &= Ae^0 + \frac{eE}{k} \\ \rightarrow A &= -\frac{eE}{k} \end{aligned}$$

Solution de l'équation différentielle :

$$\rightarrow v = \frac{eE}{k} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{avec } \tau = \frac{m}{k}$$



τ = temps moyen entre deux collisions.

Ici on va travailler qu'avec le régime permanent, on dit que $v = eE/k$

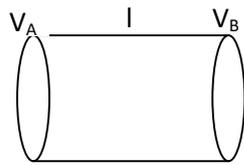
Finalement :

$$\begin{aligned} J = nqv &= nev = \frac{ne^2 E}{k} \quad k = \frac{m}{\tau} \\ J &= \frac{ne^2 \tau}{m} E = \sigma E \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{ne^2 \tau}{m} = \frac{1}{\rho}$$

Conductivité : inverse de la résistivité ($\rho = \frac{l}{s}$)

On utilise la circulation :



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot l$$

$$E = \frac{V_A - V_B}{l}$$

$$I = J \times S \quad \sigma E = \frac{1}{\rho} E \quad R = \rho \frac{l}{S}$$

$$I = J \times S = \frac{1}{\rho} \times \frac{V_A - V_B}{l} S$$

$$V_A - V_B = \rho \frac{l}{S} I = RI \rightarrow \text{Loi d'Ohm}$$

$$\text{avec } \rho = \frac{RS}{l} \Omega \cdot m$$

La résistivité, comme la conductivité, sont annulées.

Métal	Ag	Cu	Al	W	Fe
ρ ($\Omega \cdot m$)	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	10^{-7}